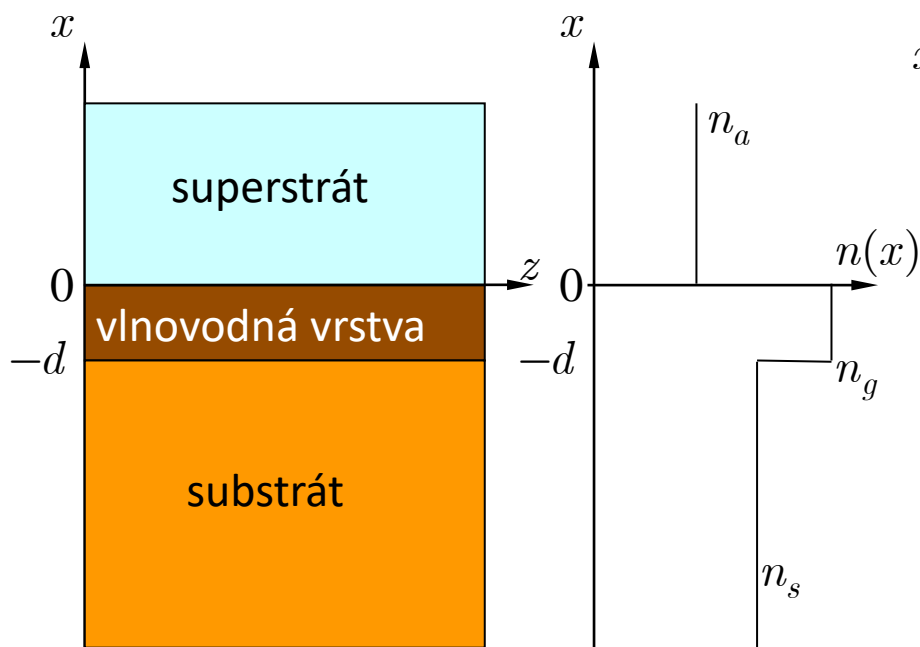


**Teoretické základy**

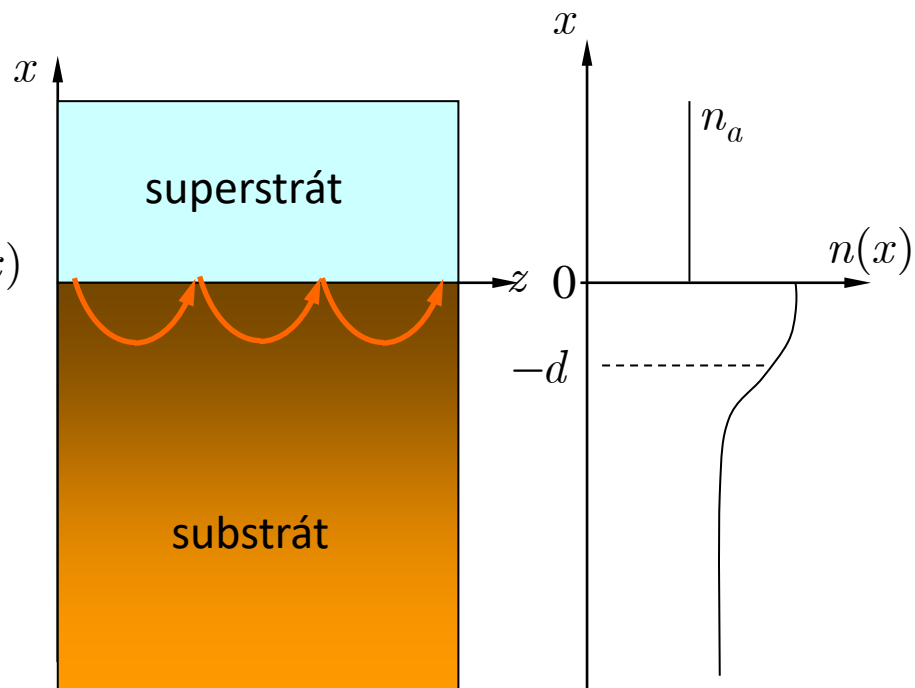
**fotonických vlnovodných struktur**

# Základy teorie planárních vlnovodů

## Vrstvový vlnovod

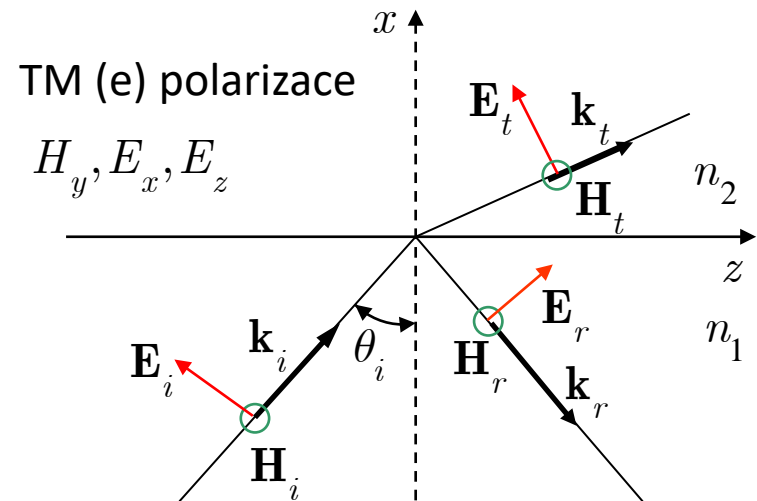
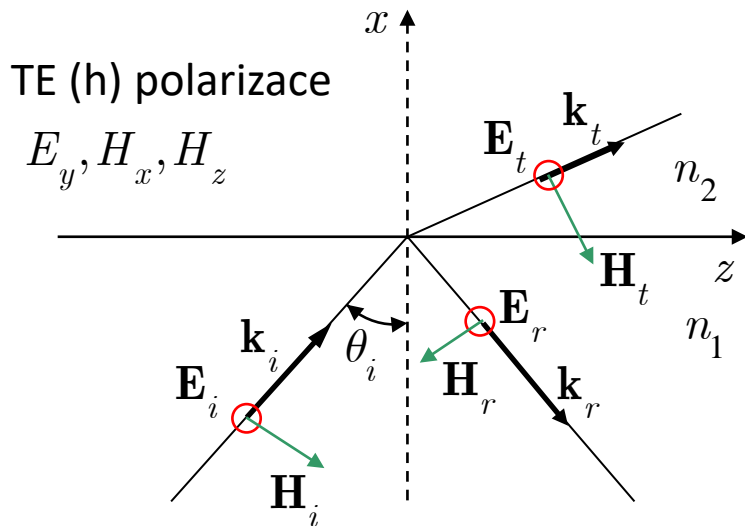


## „Gradientní“ (nehomogenní) vlnovod



# Činitel odrazu rovinné vlny od rovinného rozhraní Fresnelovy vzorce

Odraz (a lom) rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí,  $n_1 > n_2$



Dopadající, odražená a prošlá vlna:  $\mathbf{k}_\alpha = k_0 (\gamma_\alpha \mathbf{x}^0 + N_\alpha \mathbf{z}^0)$ ,  $\alpha = i, r, t$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i0} e^{ik_0(\gamma_i x + N_i z)}, \quad \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0} e^{ik_0(\gamma_r x + N_r z)}, \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0} e^{ik_0(\gamma_t x + N_t z)},$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i0} e^{ik_0(\gamma_i x + N_i z)}, \quad \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_{r0} e^{ik_0(\gamma_r x + N_r z)}, \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{t0} e^{ik_0(\gamma_t x + N_t z)}$$

Spojitost tečných složek *intenzit* polí na rozhraní  $x = 0$  :

$$\mathbf{x}^0 \times (\mathbf{E}_{i0} e^{ik_0 N_i z} + \mathbf{E}_{r0} e^{ik_0 N_r z}) = \mathbf{x}^0 \times \mathbf{E}_{t0} e^{ik_0 N_t z},$$

$$\mathbf{x}^0 \times (\mathbf{H}_{i0} e^{ik_0 N_i z} + \mathbf{H}_{r0} e^{ik_0 N_r z}) = \mathbf{x}^0 \times \mathbf{H}_{t0} e^{ik_0 N_t z},$$

$$N_i = N_r = N_t = N = \beta / k_0$$

# Činitel odrazu rovinné vlny od rovinného rozhraní

## Fresnelovy vzorce – 2

=> (podélné) konstanty šíření všech vln jsou stejné.

$$\text{Pak } \gamma_i = \sqrt{n_1^2 - N^2}, \quad \gamma_r = -\sqrt{n_1^2 - N^2}, \quad \gamma_t = \sqrt{n_2^2 - N^2}, \quad N = n_1 \sin \theta_i.$$

Spojitosť tečných složek *intenzit* polí na rozhraní

TE (h) polarizace

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{z}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \frac{k_0}{\omega\mu_0} \gamma E_y$$

$$E_y : \quad E_i + E_r = E_t$$

$$H_z : \quad \gamma_1 E_i - \gamma_1 E_r = \gamma_2 E_t$$

$$R^{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2};$$

$$R^{TE} = \frac{\sqrt{n_1^2 - N^2} - \sqrt{n_2^2 - N^2}}{\sqrt{n_1^2 - N^2} + \sqrt{n_2^2 - N^2}}$$

TM (e) polarizace

$$E_z = -\mathbf{z}^0 \cdot \frac{1}{i\omega\epsilon_0 n^2} \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{k_0}{\omega\epsilon_0 n^2} \gamma H_y$$

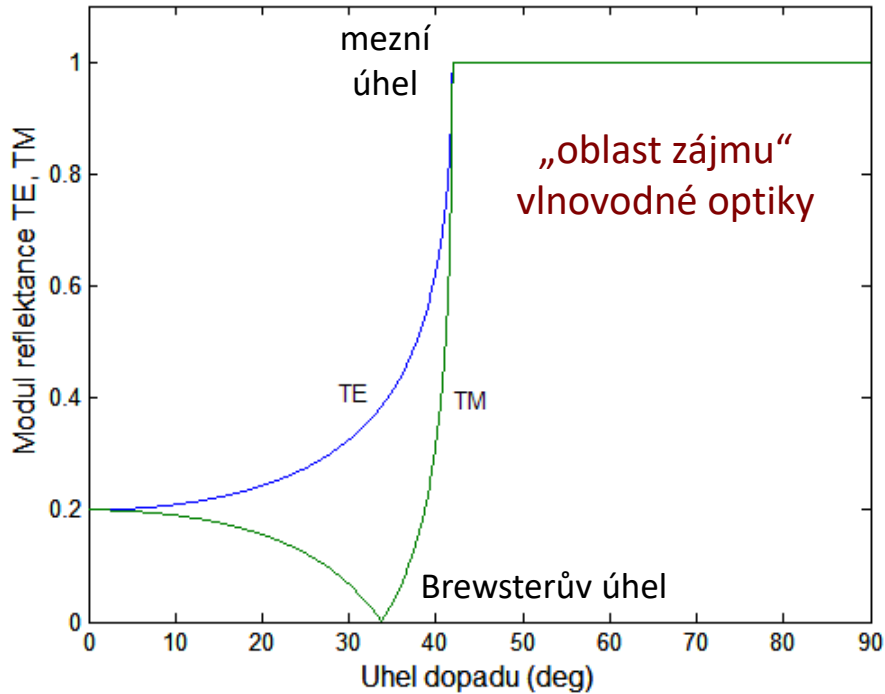
$$H_y : \quad H_i + H_r = H_t$$

$$E_z : \quad \frac{\gamma_1}{n_1^2} H_i - \frac{\gamma_1}{n_1^2} H_r = \frac{\gamma_2}{n_2^2} H_t$$

$$R^{TM} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{\gamma_1/n_1^2 - \gamma_2/n_2^2}{\gamma_1/n_1^2 + \gamma_2/n_2^2};$$

$$R^{TM} = \frac{n_2^2 \sqrt{n_1^2 - N^2} - n_1^2 \sqrt{n_2^2 - N^2}}{n_2^2 \sqrt{n_1^2 - N^2} + n_1^2 \sqrt{n_2^2 - N^2}}$$

# Vlastnosti činitele odrazu



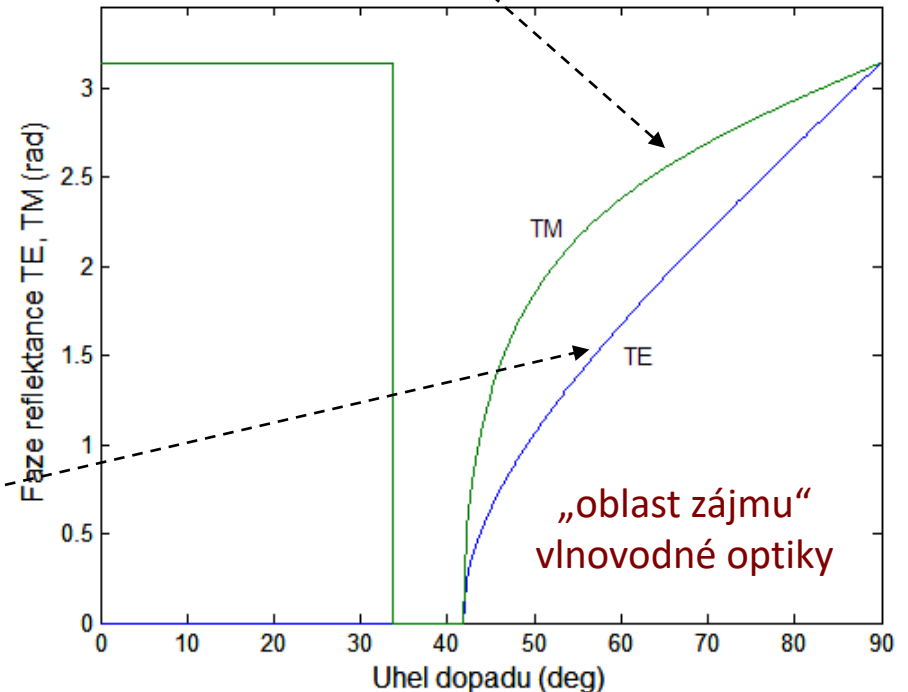
$$R^{TE} = e^{i\Phi^{TE}};$$

$$\Phi^{TE} = -2 \arctan \sqrt{\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}}.$$

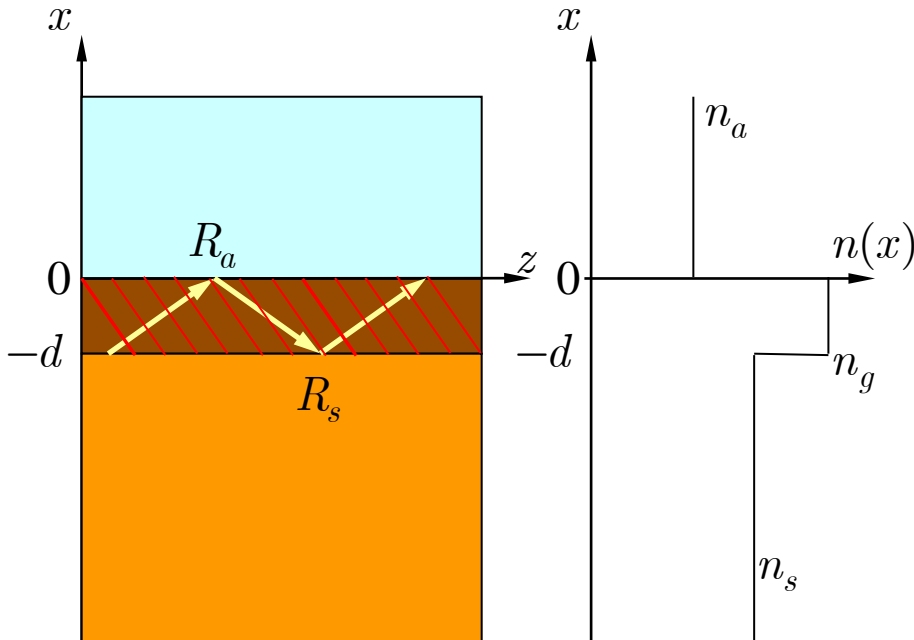
V oblasti totálního odrazu je modul roven 1 a fáze závisí na úhlu dopadu:

$$R^{TM} = e^{i\Phi^{TM}};$$

$$\Phi^{TM} = -2 \arctan \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sqrt{\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}} \right].$$



# Disperzní rovnice planárního vrstvého vlnovodu



Vrstvový vlnovod –  
podmínka příčné rezonance

$$R_a R_s e^{2ik_0 \gamma_g d} = 1$$

$$2k_0 \gamma_g d + \arg R_s + \arg R_a = 2\pi m$$

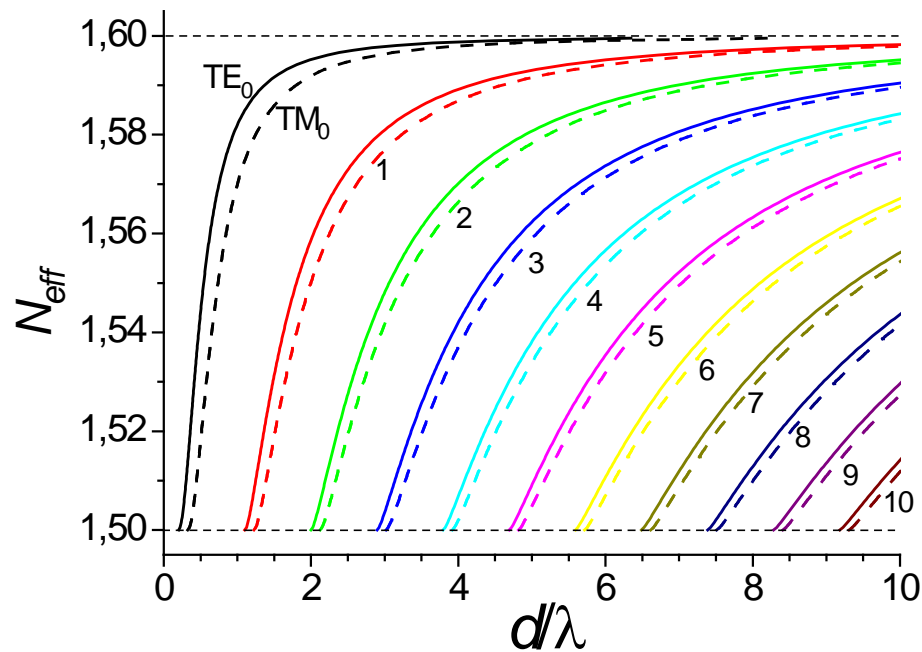
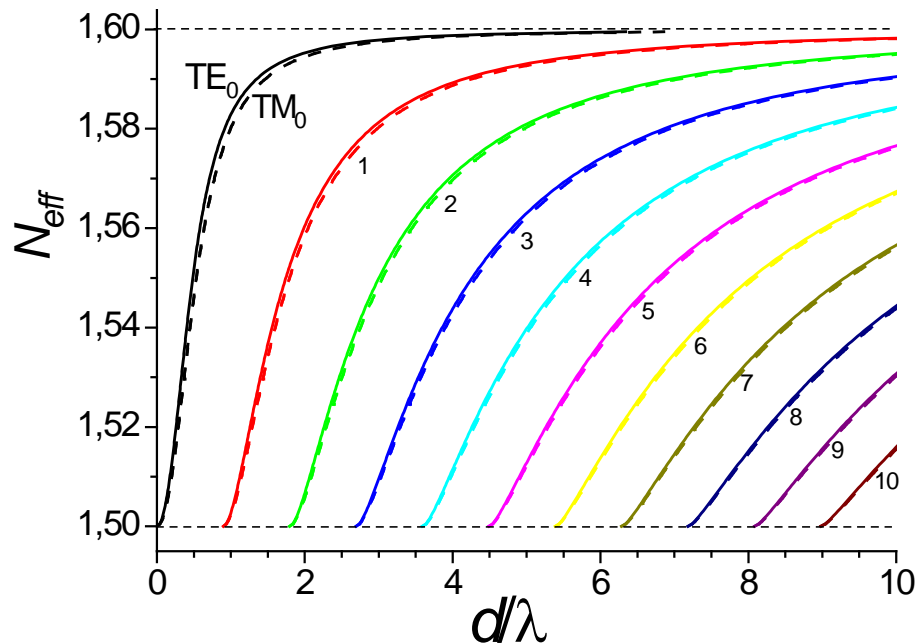
$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{TE} \\ 1, & \text{TM} \end{cases}$$

$$k_0 d \sqrt{n_g^2 - N^2} = \arctan \left[ \left( \frac{n_g}{n_s} \right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_s^2}{n_g^2 - N^2}} \right] + \arctan \left[ \left( \frac{n_g}{n_a} \right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_a^2}{n_g^2 - N^2}} \right] + m\pi,$$

# Disperzní diagram planárního vlnovodu

Nesymetrický vlnovod

$$n_a < n_s < n_g$$

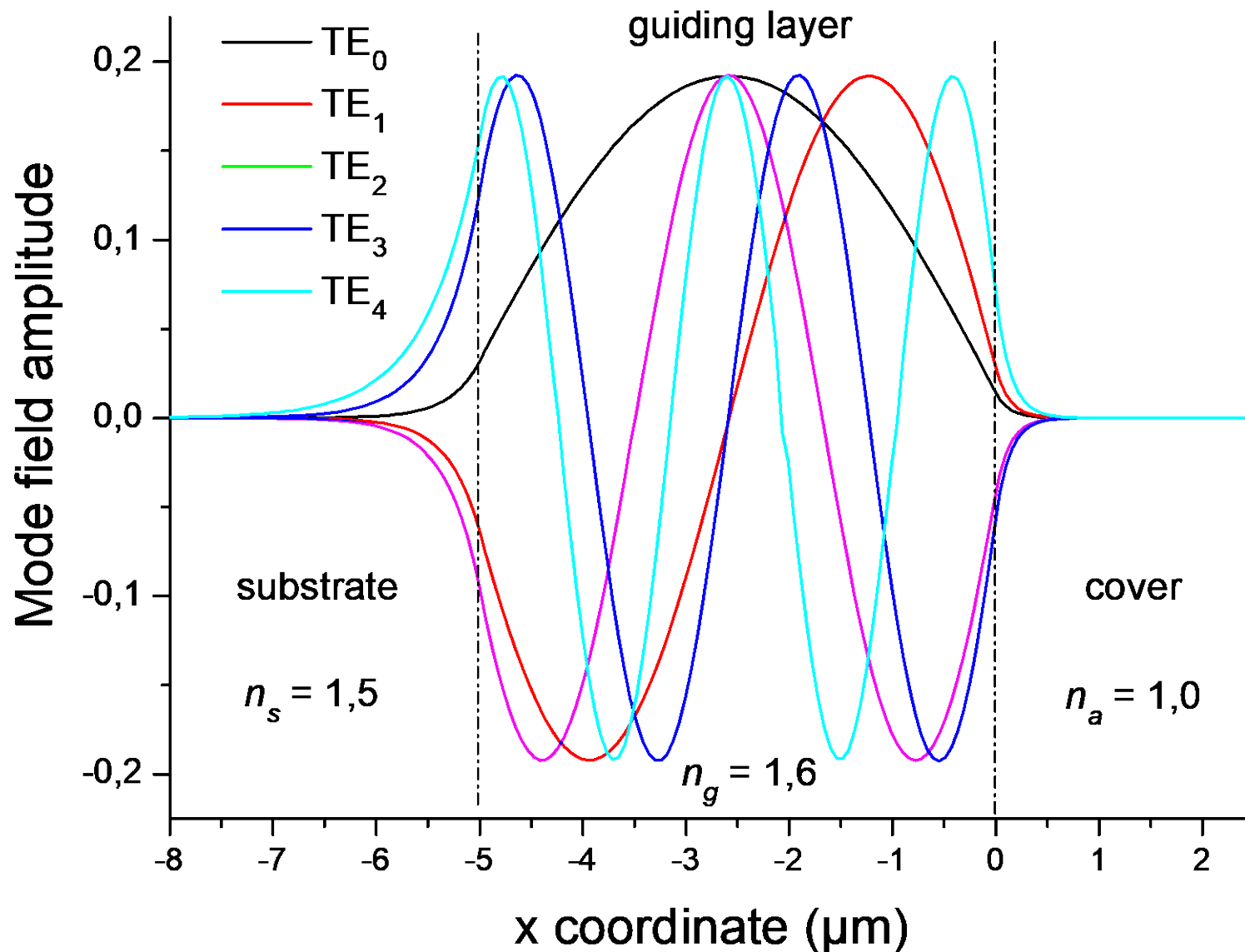


Symetrický vlnovod

$$n_a = n_s < n_g$$



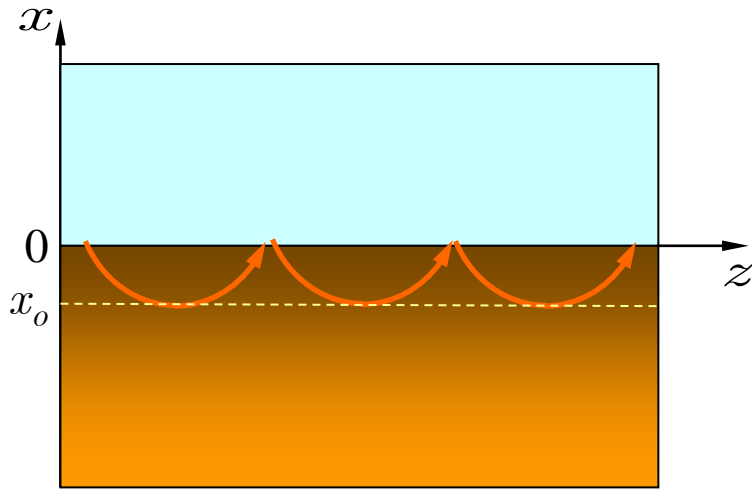
# Rozložení pole vidů vrstevného vlnovodu





# Disperzní rovnice gradientního vlnovodu

Wignerova –Kramersova – Brillouinova (WKB) aproximace



$$k_0 \gamma_g d \rightarrow k_0 \int_{x_0}^0 \gamma_g(x) dx = k_0 \int_{x_0}^0 \sqrt{n^2(x) - N^2} dx$$

$$R_s \rightarrow \exp(-i\pi/2)$$

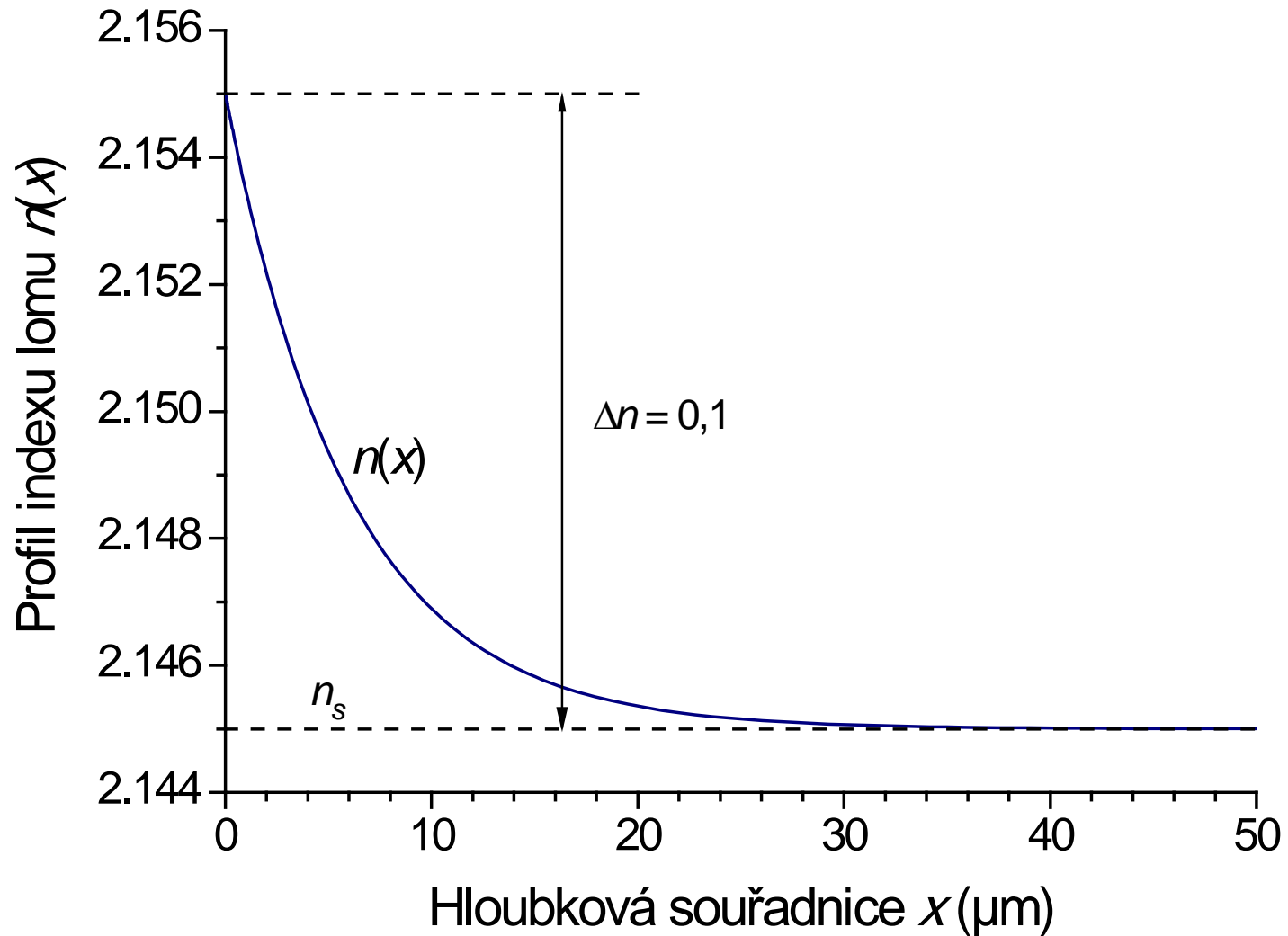
$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{TE} \\ 1, & \text{TM} \end{cases}$$

$$k_0 \int_{x_0(N)}^0 \sqrt{n^2(x) - N^2} dx = \arctan \left[ \left( \frac{n_g}{n_a} \right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_a^2}{n_g^2 - N^2}} \right] + \left( m + \frac{1}{4} \right) \pi,$$

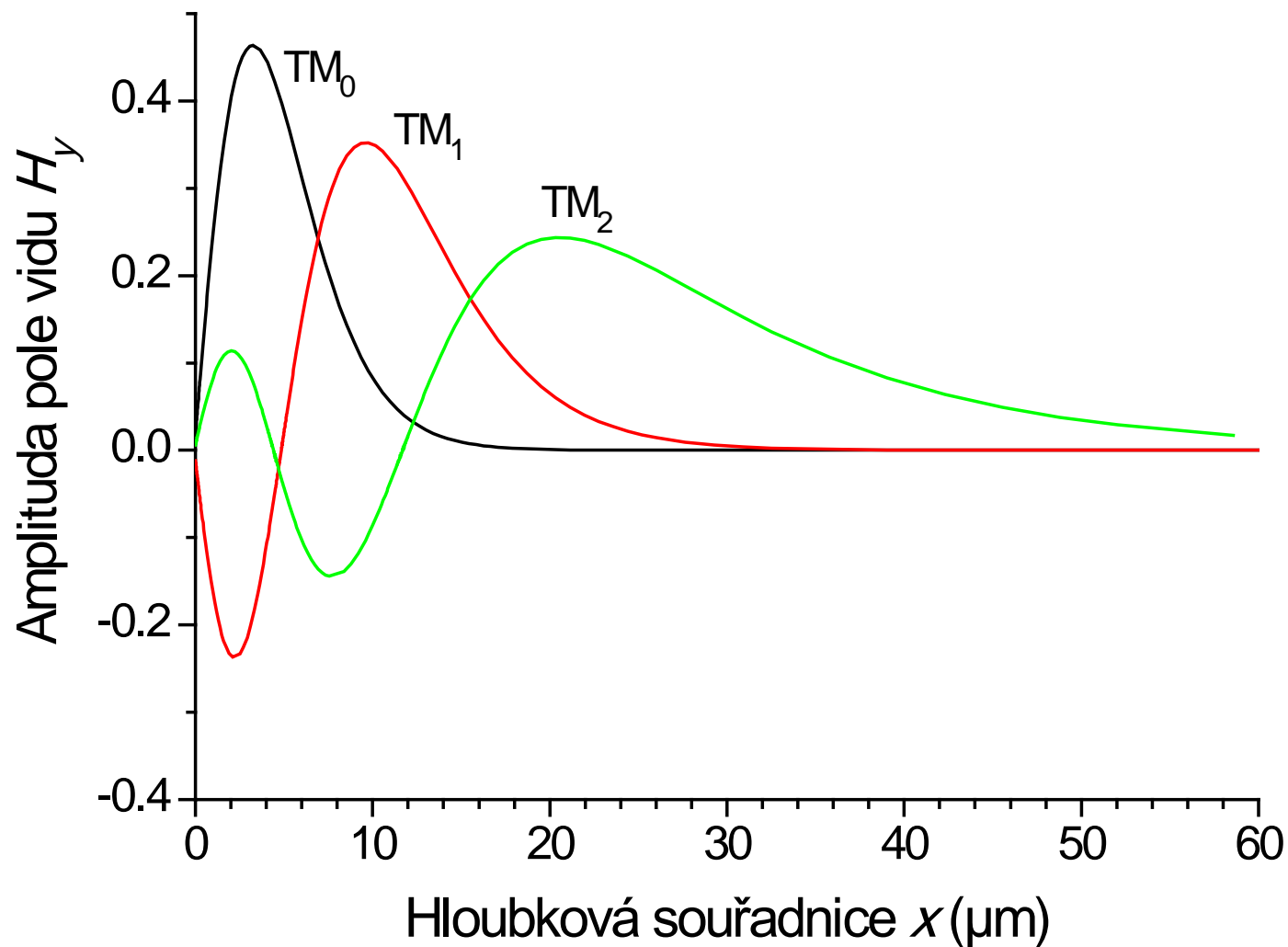
$$k_x = 0 \quad \Rightarrow \quad n(x_0) = N$$

Základ postupu určování profilu indexu lomu  
ze spektra vedených vidů

## Příklad: vlnovod s exponenciálním profilem indexu lomu



## Rozložení pole $H_y$ TM vidů gradientního vlnovodu



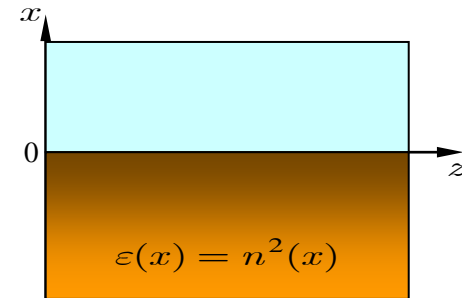
# Maxwellovy rovnice pro planární vlnovod

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2(x)\mathbf{E} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (n^2\mathbf{E}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{E}(x, z) = \mathbf{E}(x) \exp(ik_0 Nz), \quad \mathbf{H}(x, z) = \mathbf{H}(x) \exp(ik_0 Nz)$$

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}, \quad N = \beta / k_0 \dots \text{efektivní index lomu}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = ik_0 N, \quad \nabla = \mathbf{x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 Nz^0;$$



1. TE polarizace:  $E_y, H_x, H_z$

$$\begin{aligned} \frac{dE_y}{dx} &= i\omega\mu_0 H_z, \\ -ik_0 N E_y &= -i\omega\mu_0 H_x, \\ \frac{dH_z}{dx} - ik_0 N H_x &= i\omega\varepsilon_0 n^2 E_y, \end{aligned}$$

$$\frac{dH_z}{dx} = i\omega\varepsilon_0 [n^2(x) - N^2] E_y.$$

2. TM polarizace:  $H_y, E_x, E_z$

$$\begin{aligned} \frac{dH_y}{dx} &= -i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_z, \\ -ik_0 N H_y &= -i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_x, \\ \frac{dE_z}{dx} - ik_0 N E_x &= -i\omega\mu_0 H_y, \end{aligned}$$

$$\frac{dE_z}{dx} = -i\omega\mu_0 \frac{[n^2(x) - N^2]}{n^2(x)} H_y,$$

# Maxwellovy rovnice pro planární vlnovod

## Vidy TE

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + k_0^2 [n^2(x) - N^2] E_y(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx < \infty$$

$$P_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{z}^0 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* dx = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} N^* \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx,$$

## Vidy TM

$$n^2(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{n^2(x)} \frac{dH_y}{dx} \right] + k_0^2 [n^2(x) - N^2] H_y(x) = 0,$$

$$P_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{z}^0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_y^* dx = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2(x)} |H_y|^2 dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2(x)} |H_y|^2 dx < \infty$$

# Analogie vlnové rovnice se Schrödingerovou rovnicí pro částici v potenciálové jámě

Vlnová rovnice

$$\frac{1}{k_0^2} \frac{d^2 E_y}{dx^2} + n^2(x) E_y = N^2 E_y \Leftrightarrow$$

Schrödingerova rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

dominantní složka  $E$

TE polarizace

$$E_y(x) \Leftrightarrow$$

$$\psi(x)$$

$$k_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$$

$$n^2(x) \Leftrightarrow$$

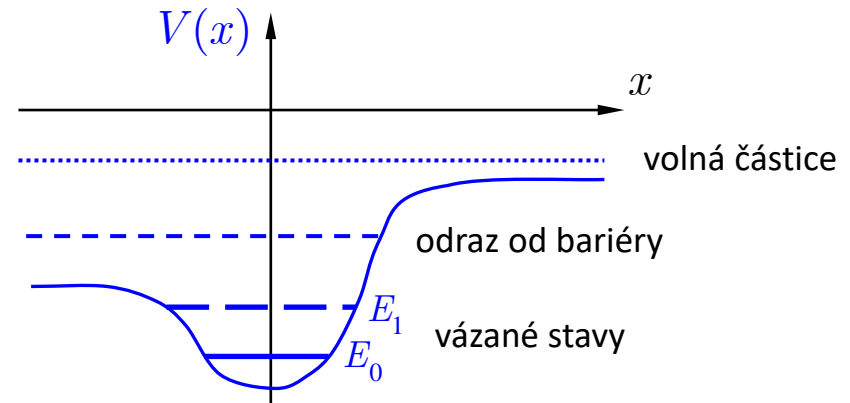
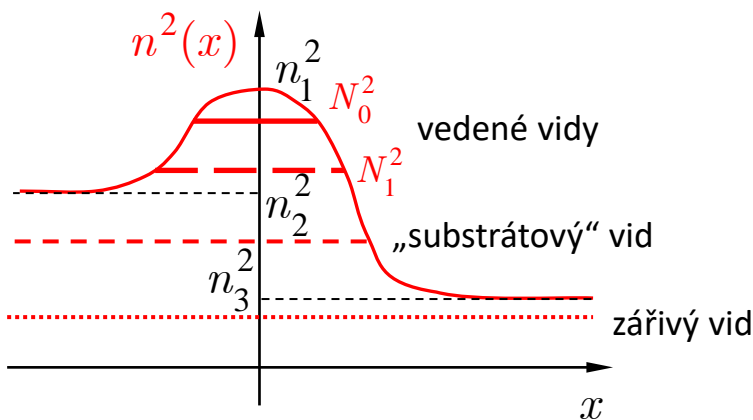
$$-V(x)$$

$$N^2 \Leftrightarrow$$

$$-E$$

vlnová funkce

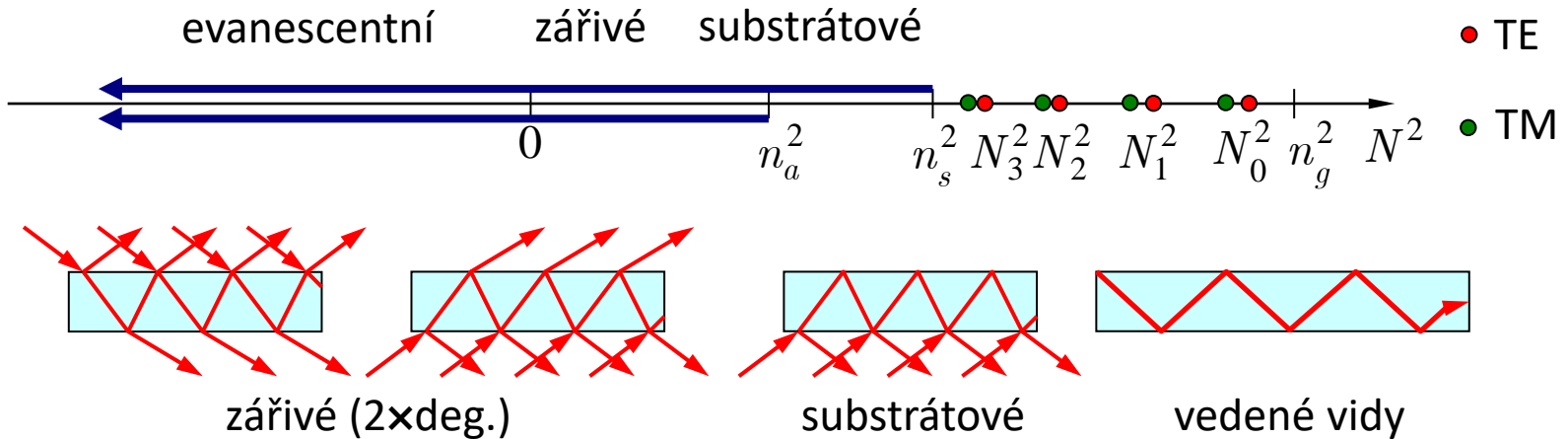
(TM polarizace nemá přesnou analogii, ale chová se podobně)



# Vidy jako vlastní funkce lineárního diferenciálního operátoru

**Vidy TE** 
$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + k_0^2 n^2(x) E_y(x) = \left(\beta^{TE}\right)^2 E_y(x), \quad \beta^{TE} = k_0 N^{TE}$$

**Vidy TM** 
$$n^2(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{n^2(x)} \frac{dH_y}{dx} \right] + k_0^2 n^2(x) H_y(x) = \left(\beta^{TM}\right)^2 H_y(x), \quad \beta^{TM} = k_0 N^{TM}$$



# Ortogonalita vlastních vidů vlnovodů

Lze ukázat, že pro vedené vidy (s diskretním spektrem) platí podmínka ortogonality

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_m(x) \times \mathbf{H}_n(x) \cdot \mathbf{z}^0 dx = \frac{\beta_m}{|\beta_m|} \delta_{mn}.$$

Pro zářivé a evanescentní vidy (se spojitým spektrem) platí podmínka ortogonality

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, \beta) \times \mathbf{H}_n(x, \beta') \cdot \mathbf{z}^0 dx = \frac{\beta}{|\beta|} \delta(\beta - \beta')$$

(přitom je třeba brát v úvahu *hlavní hodnotu integrálu*)

zářivé (a evanescentní) vidy (se spojitým spektrem) jsou vždy s vedenými vidy ortogonální :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, \beta) \times \mathbf{H}_n(x) \cdot \mathbf{z}^0 dx = 0,$$

**Pro bezeztrátové vlnovody** jsou *příčné* složky polí  $\mathbf{E}_\perp$  a  $\mathbf{H}_\perp$  *vedených vidů* soufázové, takže *v takovém případě* platí i „výkonová“ ortogonalita

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_m(x) \times \mathbf{H}_n^*(x) \cdot \mathbf{z}^0 dx = \frac{\beta_m}{|\beta_m|} \delta_{mn}.$$



# Výkon přenášený superpozicí vlastních vidů

Pokud je současně vybuzeno více (*konečný počet*) *vedených* vidů,

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z) = \sum_m [a_m \mathbf{E}_{m\perp}(x, y) \exp(i\beta_m z) + b_m \mathbf{E}_{m\perp}(x, y) \exp(-i\beta_m z)],$$

$$\mathbf{H}_\perp(x, y, z) = \sum_n [a_n \mathbf{H}_{n\perp}(x, y) \exp(i\beta_n z) - b_n \mathbf{H}_{n\perp}(x, y) \exp(-i\beta_n z)].$$

v kladném směru z

v záporném směru z

Přenesený výkon:

$\beta_m, \beta_n$  jsou **reálné**.

$$P_z(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^* \cdot d\mathbf{S} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m,n} \left( a_m a_n^* e^{i(\beta_m - \beta_n^*)z} - b_m b_n^* e^{-i(\beta_m - \beta_n^*)z} + b_m a_n^* e^{-i(\beta_m + \beta_n^*)z} - a_m b_n^* e^{i(\beta_m + \beta_n^*)z} \right) \iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\mathbf{S} \right\}$$

V bezztrátovém vlnovodu  $\iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\mathbf{S} = \frac{\beta_m}{|\beta_m|} \delta_{mn} = \delta_{mn};$

$$P_z = \frac{1}{2} \sum_m (a_m a_m^* - b_m b_m^*) = P_m^+ - P_m^-$$

*celkový výkon je roven součtu výkonů přenášených jednotlivými vidy.*

# Evanescentní vidy – jednosměrná superpozice

Evanescentní vidy:  $\beta_m = i|\beta_m|$ ,  $[\exp(i\beta_m z)]^* = [\exp(-|\beta_m|z)]^* = \exp(-|\beta_m|z)$ ,

$\mathbf{E}_{m\perp}^*(x, y) = \mathbf{E}_{m\perp}(x, y)$ ,  $\mathbf{H}_{m\perp}^*(x, y) = -\mathbf{H}_{m\perp}(x, y)$  ... pole fázově posunuta o  $\pm \pi/2$

Evanescentní vidy  
v bezeztrátovém vlnovodu

$$\iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\mathbf{S} = \frac{\beta_m}{|\beta_m|} \delta_{mn} = \pm i\delta_{mn};$$

Jednosměrná superpozice:  $\mathbf{E}_\perp(x, y, z) = \sum_m a_m \mathbf{E}_{m\perp}(x, y) \exp(-|\beta_m|z)$ ,

Přenesený výkon:  $\mathbf{H}_\perp(x, y, z) = \sum_n a_n \mathbf{H}_{n\perp}(x, y) \exp(-|\beta_n|z)$ .

$$\begin{aligned} P_z(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^* \cdot d\mathbf{S} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m,n} a_m a_n^* e^{i(\beta_m - \beta_n^*)z} \iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\mathbf{S} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_m a_m a_m^* e^{-2|\beta_m|z} \underbrace{\operatorname{Re} \left\{ \iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{m\perp}^* \cdot d\mathbf{S} \right\}}_0 = 0; \end{aligned}$$

# Evanescentní vidy – obousměrná superpozice

$$\mathbf{E}_{\perp}(x, y, z) = \sum_m \left[ a_m \mathbf{E}_{m\perp}(x, y) \exp(-|\beta_m|z) + b_m \mathbf{E}_{m\perp}(x, y) \exp(|\beta_m|z) \right],$$

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, y, z) = \sum_n \left[ a_n \mathbf{H}_{n\perp}(x, y) \exp(-|\beta_n|z) - b_n \mathbf{H}_{n\perp}(x, y) \exp(|\beta_n|z) \right],$$

$$\mathbf{H}_{\perp}^*(x, y, z) = \sum_n \left[ a_n^* \mathbf{H}_{n\perp}^*(x, y) \exp(-|\beta_n|z) - b_n^* \mathbf{H}_{n\perp}^*(x, y) \exp(|\beta_n|z) \right]$$

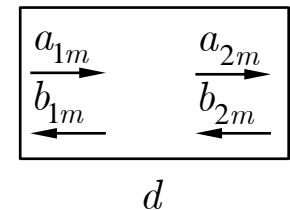
Obousměrná superpozice:

$$P_z(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m,n} \left[ a_m a_n^* e^{-(|\beta_m|+|\beta_n|)z} - b_m b_n^* e^{(|\beta_m|+|\beta_n|)z} + b_m a_n^* e^{(|\beta_m|-|\beta_n|)z} - a_m b_n^* e^{(|\beta_n|-|\beta_m|)z} \right] (\pm i \delta_{mn}) \right\}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_m \left[ (b_m a_m^* - a_m b_m^*) \right] \neq 0$$

Označme  $d$  délku úseku s evanescentními vlnami,

$$b_{2m} = b_{1m} \exp(|\beta_m|d), \quad b_{1m} = b_{2m} \exp(-|\beta_m|d)$$



$$P_z(z) = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_m \left[ (b_{2m} a_{1m}^* - a_{1m} b_{2m}^*) \exp(-|\beta_m|d) \right] \neq 0 \quad \dots \textit{optické tunelování}$$

# Metoda příčné rezonance (admittance) pro TE vidy

$$\frac{dE_y}{dx} = i\omega\mu_0 H_z, \quad \frac{dH_z}{dx} = i\omega\varepsilon_0 \left[ n^2(x) - N^2 \right] E_y \quad \dots \text{Maxwellovy rovnice}$$

$$u(x) = iZ_0 \frac{H_z}{E_y} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{H_z}{E_y} = \frac{i\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \frac{H_z}{E_y} = \frac{dE_y / dx}{k_0 E_y} \quad \dots \text{(normovaná) příčná admittance}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \dots \text{vlnová impedance vakua}$$

Diferenciální rovnice pro příčnou admittanci:

$$\frac{1}{k_0} \frac{du}{dx} = i \frac{Z_0}{k_0} \frac{\frac{dH_z}{dx} E_y - H_z \frac{dE_y}{dx}}{E_y^2} = - \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}_{1} \omega\varepsilon_0 \left[ n^2(x) - N^2 \right] + \overbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \frac{H_z^2}{E_y^2}}^{Z_0^2};$$

Výsledná soustava dvou rovnic 1. řádu s okrajovými podmínkami (pro **vedený** vid)

$$\frac{1}{k_0} \frac{du}{dx} = -u^2(x) - \left[ n^2(x) - N^2 \right], \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{k_0} \frac{dE_y / dx}{E_y} = -\sqrt{N^2 - n_a^2}$$

$$\frac{1}{k_0} \frac{dE_y}{dx} = u(x) E_y, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k_0} \frac{dE_y / dx}{E_y} = \sqrt{N^2 - n_s^2}$$

Riccatiho rovnice

# Metoda příčné rezonance (impedance) pro TM vidy

$$\frac{dH_y}{dx} = -i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_z, \quad \frac{dE_z}{dx} = -i\omega\mu_0 \frac{[n^2(x) - N^2]}{n^2(x)} H_y \quad \dots \text{Maxwellovy rovnice}$$

$$u(x) = \frac{dH_y / dx}{n^2 k_0 H_y} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \frac{E_z}{H_y} = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{E_z}{H_y} = -iY_0 \frac{E_z}{H_y} \quad \dots \text{(normovaná) příčná impedance}$$

$$Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_0} \quad \dots \text{vlnová admitance vakua}$$

Diferenciální rovnice pro příčnou impedanci:

$$\frac{1}{k_0} \frac{du}{dx} = -i \frac{Y_0}{k_0} \frac{\frac{dE_z}{dx} H_y - E_z \frac{dH_y}{dx}}{H_y^2} = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \omega\mu_0}_{1} \frac{[n^2(x) - N^2]}{n^2(x)} - \overbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\omega\varepsilon_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} n^2}^{Y_0^2} \frac{E_z^2}{H_y^2};$$

Výsledná soustava dvou rovnic 1. řádu s okrajovými podmínkami (pro **vedený** vid)

$$\frac{1}{k_0} \frac{du}{dx} = -n^2(x)u^2(x) - \frac{[n^2(x) - N^2]}{n^2(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{k_0} \frac{dH_y / dx}{n^2 H_y} = -\frac{\sqrt{N^2 - n_a^2}}{n^2}$$

$$\frac{1}{k_0} \frac{dH_y}{dx} = n^2(x)u(x)H_y, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k_0} \frac{dH_y / dx}{n^2 H_y} = \frac{\sqrt{N^2 - n_s^2}}{n^2}$$

Riccatiho rovnice

# Řešení Riccatiho rovnice

Riccatiho rovnici

$$\frac{1}{k_0} \frac{du}{dx} = -u^2(x) - [n^2(x) - N^2]$$

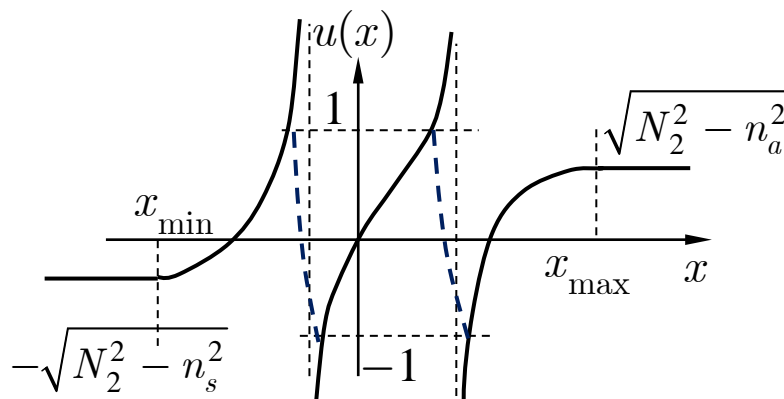
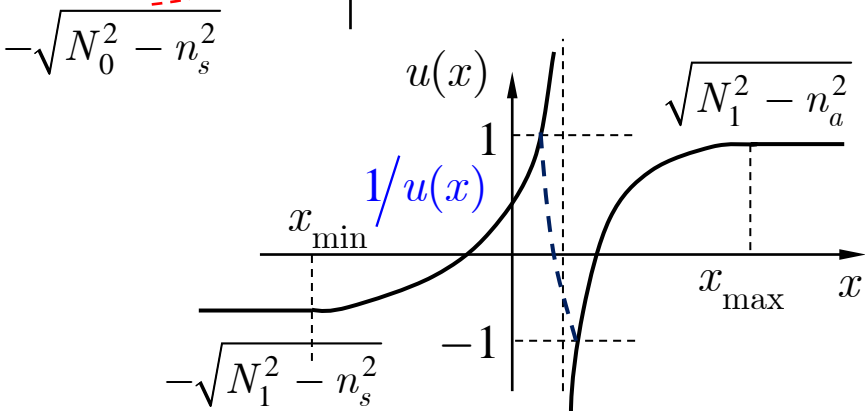
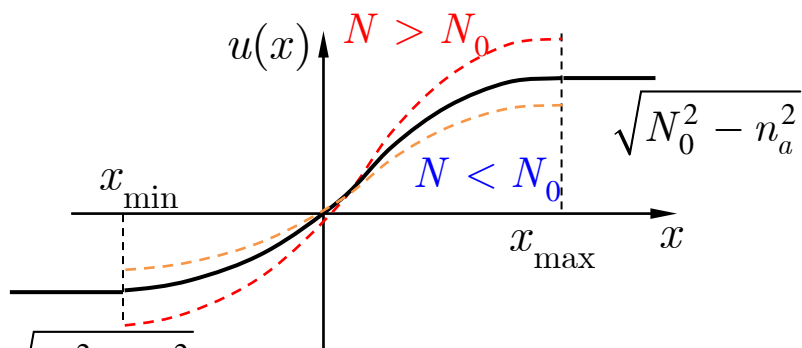
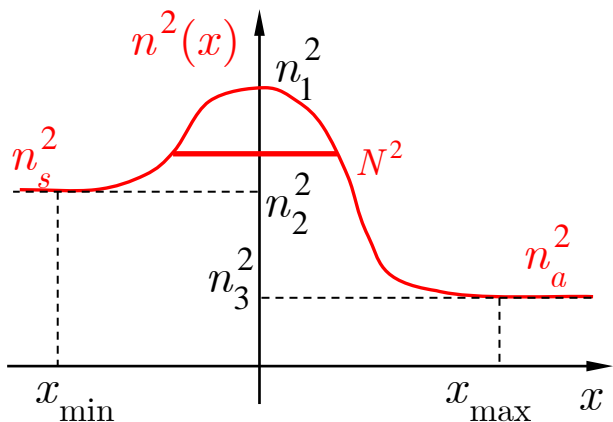
řešíme např. integrací Rungeho-Kuttovou metodou s počáteční podmínkou

$$u(x_{\min}) = -\sqrt{N^2 - n_s^2}, \quad N^2 \approx n_1^2 - \delta.$$

Měníme postupně  $N$  tak, aby na konci integračního intervalu byla splněna i druhá podmínka,

$$u(x_{\max}) = \sqrt{N^2 - n_a^2}.$$

Vyšší vidy: singularity (póly) funkce  $u(x)$



# Vyšší vidy

**Vidy vyšších řádů** hledáme analogicky z výchozího odhadu  $N_{m+1}^2 \approx N_m^2 - \delta$ .

Přitom vznikne problém, že funkce  $E_{ym}(x)$  prochází v intervalu  $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$   $m$ -krát nulou,

takže  $u_m(x) = \frac{dE_{ym} / dx}{k_0 E_{ym}}$  má v těchto bodech póly.

Problém lze elegantně obejít tak, že v okolí pólů přejdeme od řešení rovnice pro  $u_m(x)$

na řešení rovnice pro  $v_m(x) = 1 / u_m(x)$ , která má podobný tvar:

$$\frac{1}{k_0} \frac{dv(x)}{dx} = 1 + [n^2(x) - N^2] v^2(x).$$

Funkce  $v_m(x)$  prochází v kritických bodech nulou, takže řešení nemá singularity.

Po průchodu nulou se opět vrátíme k řešení rovnice pro  $u_m(x)$ .

Výpočet funkce  $E_{ym}(x)$  nečiní potíže, poněvadž funkce  $u_m(x)$  je integrovatelná.

## Rozložení pole vyšších vidů

$$u(x) = \frac{dE_y / dx}{k_0 E_y} \Rightarrow \frac{dE_y}{dx} = k_0 u(x) E_y(x) \quad \text{TE vidy}$$

$$u(x) = \frac{dH_y / dx}{n^2 k_0 H_y} \Rightarrow \frac{dH_y}{dx} = \frac{k_0}{n^2} u(x) H_y(x) \quad \text{TM vidy}$$

Řešení přímou integrací metodou Rungeho a Kutty.

Funkce určena až na multiplikatívní konstantu, kterou můžeme určit z normovací podmínky

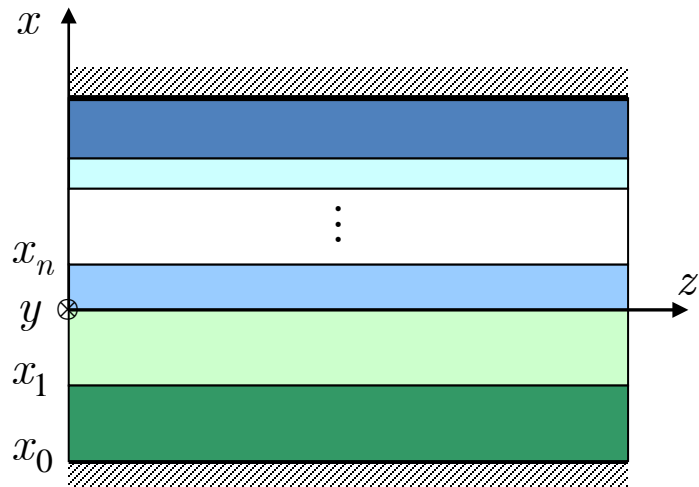
$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_{ym}(x)|^2 dx = \frac{2Z_0}{|N_m|} \quad \text{TE vidy}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2(x)} |H_{ym}(x)|^2 dx = \frac{2Y_0}{|N_m|} \quad \text{TM vidy}$$



# „Planární“ (1D) struktura jako multivrstva

## Metoda přenosové matice



Z Maxwellových rovnic plyne

J. Chilwell and I. Hodgkinson, *JOSA A*, **1**, pp. 742-753, 1984.

Normujeme souřadnice:

$$\xi = k_0 x, \quad \zeta = k_0 z, \quad Z_0 = Y_0^{-1} = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}, \quad \beta = k_0 N;$$

Normujeme složky pole:  $(\exp(i\beta z) = \exp(iN\zeta))$

TE polarizace

$$E_y = \sqrt{2k_0 Z_0} f(\xi, \zeta),$$

$$H_x = -\sqrt{2k_0 Y_0} h(\xi, \zeta),$$

$$H_z = -i\sqrt{2k_0 Y_0} g(\xi, \zeta),$$

TM polarizace

$$H_y = \sqrt{2k_0 Y_0} f(\xi, \zeta),$$

$$E_x = \sqrt{2k_0 Z_0} h(\xi, \zeta),$$

$$E_z = i\sqrt{2k_0 Z_0} g(\xi, \zeta).$$

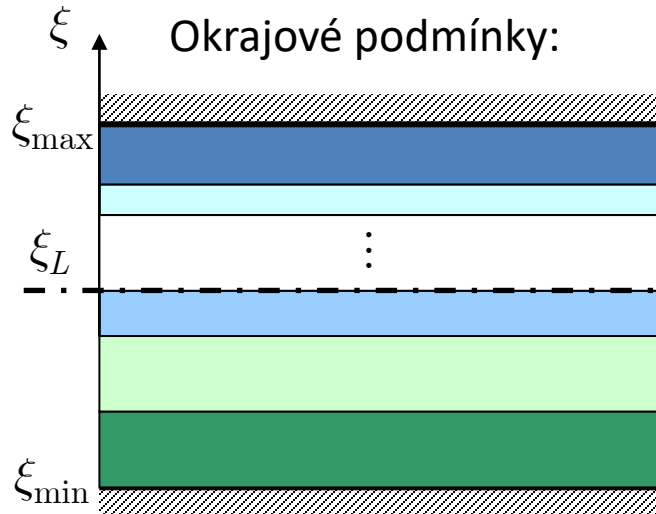
$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^\nu \\ \gamma^2/\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix}, \quad h(\xi) = \frac{N}{\varepsilon^\nu} f(\xi), \quad \gamma^2 = \varepsilon - N^2. \quad \nu = \begin{cases} 0 & \text{pro TE} \\ 1 & \text{pro TM} \end{cases}$$

Řešením je

$$\begin{pmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} f(\xi_0) \\ g(\xi_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \exp \left[ \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^\nu \\ \gamma^2/\varepsilon & 0 \end{pmatrix} (\xi - \xi_0) \right] = \begin{pmatrix} \cos \gamma(\xi - \xi_0) & \pm \frac{(\varepsilon)^\nu}{\gamma} \sin \gamma(\xi - \xi_0) \\ \mp \frac{\gamma}{\varepsilon^\nu} \sin \gamma(\xi - \xi_0) & \cos \gamma(\xi - \xi_0) \end{pmatrix}.$$

## Metoda přenosové matice pro 1D multivrstvy...

$$\begin{pmatrix} f(\xi_{l+1}) \\ g(\xi_{l+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_l^+ \cdot \begin{pmatrix} f(\xi_l) \\ g(\xi_l) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_l^\pm = \begin{pmatrix} \cos \gamma_l(\xi_{l+1} - \xi_l) & \pm \frac{(\varepsilon_l)^\nu \sin \gamma_l(\xi_{l+1} - \xi_l)}{\gamma_l} \\ \mp \frac{\gamma_l}{\varepsilon_l^\nu} \sin \gamma_l(\xi_{l+1} - \xi_l) & \cos \gamma_l(\xi_{l+1} - \xi_l) \end{pmatrix}$$



$$f(\xi_{\min}) = f(\xi_{\max}) = 0 \quad \text{nebo} \quad g(\xi_{\min}) = g(\xi_{\max}) = 0$$

$$\mathbf{M}^- = \prod_{l=M}^{L+1} \mathbf{M}_l^-, \quad \mathbf{M}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\min} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^- \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\min} \end{pmatrix}$$

nebo

$$\mathbf{M}^+ = \prod_{l=1}^L \mathbf{M}_l^+, \quad \mathbf{M}^+ \cdot \begin{pmatrix} f_{\min} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^- \cdot \begin{pmatrix} f_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}$$

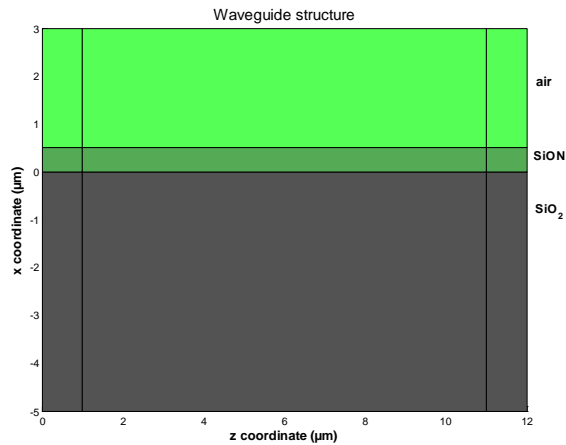
$$\begin{pmatrix} M_{12}^+ & M_{12}^- \\ M_{22}^+ & M_{22}^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{\min} \\ g_{\max} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} M_{11}^+ & M_{11}^- \\ M_{21}^+ & M_{21}^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{\min} \\ f_{\max} \end{pmatrix} = 0$$

Metoda není numericky dostatečně stabilní, pokud jsou v multivrstvě tlusté vrstvy s malým indexem lomu (sady vrstev nejsou vzájemně opticky svázány)

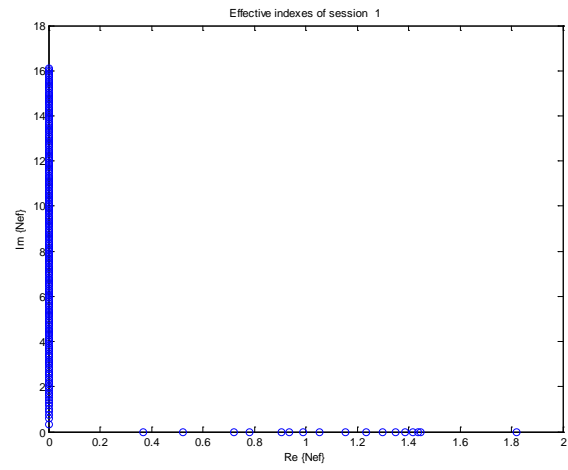
Zlepšení stability: úprava algoritmu na některé z následujících forem:

- Metoda příčné imitance (impedance, admittance);
- Metoda rozptylové matice

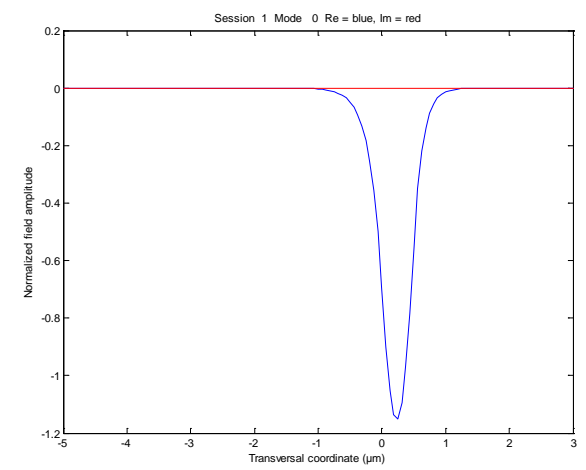
# Rozložení polí vidů vrstevného vlnovodu



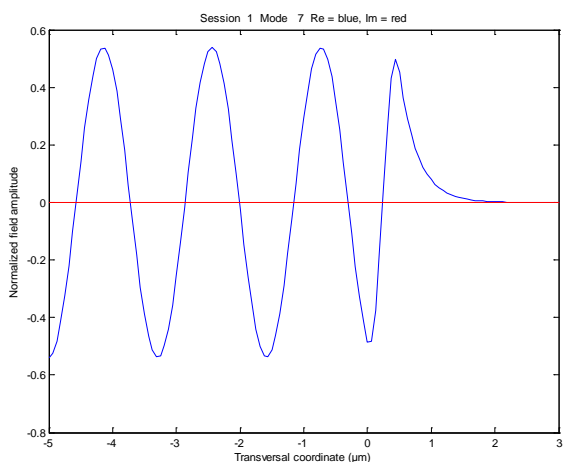
vlnovod



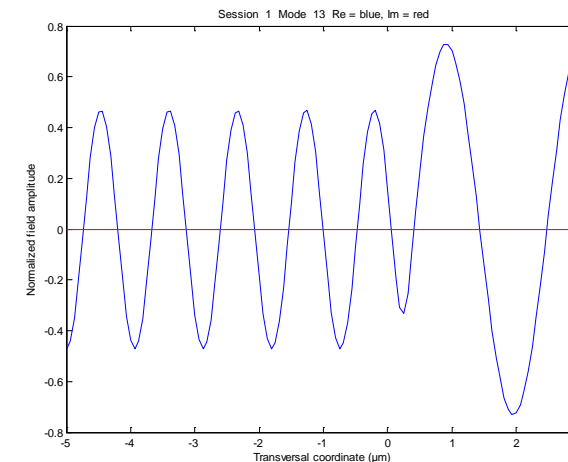
Ef. indexy lomu



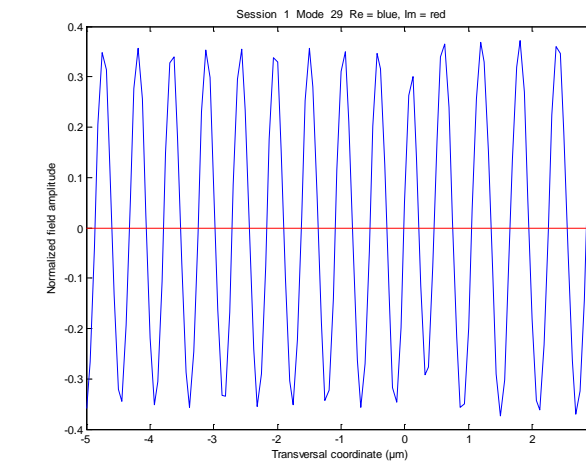
E<sub>y</sub> základního vidu TE<sub>0</sub>



E<sub>y</sub> substrátového vidu TE<sub>7</sub>



E<sub>y</sub> zářivého vidu TE<sub>13</sub>



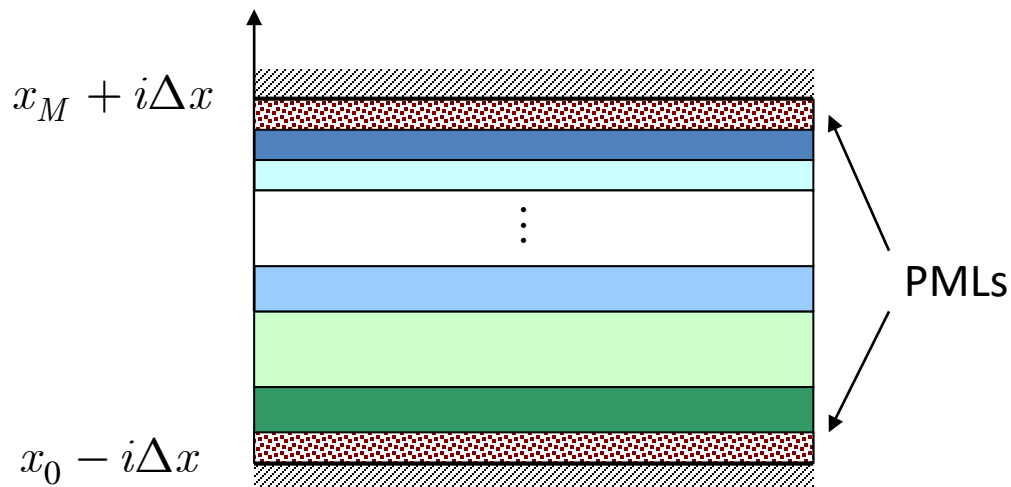
E<sub>y</sub> evanescentního vidu TE<sub>29</sub>

## Více o okrajových podmínkách

- *Otevřená struktura* – vhodné pro nalezení *několika* vidů (vedené, vytékající)
- Dokonale odrazné „tvrdé stěny“ – elektrické nebo magnetické vhodné k diskretizaci spojitého spektra zářivých vidů pro metodu rozvoje ve vlastní vidy
- Absorpční okrajové podmínky pro absorpci parazitních odrazů;
  - „**dokonale přizpůsobené vrstvy**“ (**perfectly matched layers, PML**)

J.-P. Bérenger, J. Comp. Phys., vol. 114, pp. 185-200, 1994

PMLs v reprezentaci komplexní souřadnice („**complex coordinate stretching**“)  
(F. Olyslager 1998; P. Bienstman 2001)



Komplexní tloušťka vrstev způsobuje exponenciální útlum:

$$d = d' + id''$$

$$\exp(ik_0\gamma d) = \exp(ik_0\gamma d') \exp(-k_0\gamma d'')$$

Formálně velmi jednoduchý algoritmus *izotropní prostředí*;

malý útlum pro tečný dopad

*neúplnost* souboru vlastních funkcí (?)

## Technické problémy jednodimenzionálních modálních metod:

- nelineární problém vlastních hodnot,
- ztrátové úlohy vyžadují hledání nul v komplexní rovině

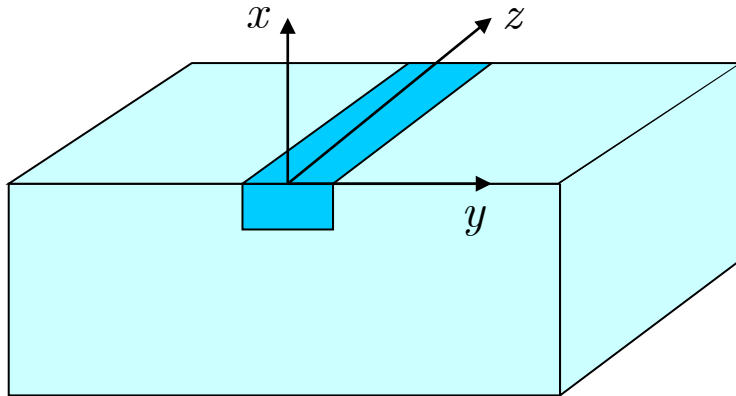
$$\Phi(N) = M_{1i}^+(N)M_{2i}^-(N) - M_{2i}^+(N)M_{1i}^-(N) = 0, \quad i = 1 \text{ nebo } 2$$

$\Phi$  - složitá transcendentní funkce

### Algoritmy pro hledání komplexních nul:

- **Metoda křivkových integrálů (Cauchyova věta)**
  - „argument principle method“ - musíme počítat funkci i její derivaci
  - „ADR algoritmus“ - stačí znát funkční hodnoty, složitější výpočet
- Disperzní funkce  $F(b)$  musí být v uvažované oblasti holomorfní (regulární)
- Spolehlivé, ale velmi pomalé metody
  - obtížně aplikovatelné pro hledání velkého množství vidů
- **“Metoda sledování kořenů”:**
  - „vypneme“ všechny ztrátové mechanismy, najdeme reálné kořeny
  - pomalu zvyšujeme ztráty a dohledáváme nuly v komplexní rovině jednoduchým algoritmem (např. Newtonovou metodou).
- Mnohem rychlejší, méně spolehlivé

# Vlastní vidy kanálkových vlnodů



$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon(x, y) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} = -\nabla(\ln \varepsilon) \cdot \mathbf{E}$$

$$\Delta \mathbf{E} + \nabla[\nabla(\ln \varepsilon) \cdot \mathbf{E}] + k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

úplná vektorová rovnice

Oddělíme příčné a podélné složky pole:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(x, y) e^{i\beta z} = \mathbf{e}_\perp(x, y) e^{i\beta z} + \mathbf{e}_z(x, y) e^{i\beta z}$$

Po úpravě

$$\Delta_\perp \mathbf{e}_\perp + \nabla_\perp [\nabla_\perp(\ln \varepsilon) \cdot \mathbf{e}_\perp] + (k_0^2 \varepsilon - \beta^2) \mathbf{e}_\perp = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{i}{\beta} \mathbf{z}^0 [\nabla_\perp \varepsilon + \nabla_\perp] \cdot \mathbf{e}_\perp$$

Vidy kanálkových vlnodů jsou **hybridní** – mají **všechny složky pole nenulové**

**Přibližné metody:** Marcatiliho metoda (separace proměnných),  
metoda efektivního indexu lomu,

**Numerické metody:** skalární, semivektorové, **vektorové** (nejčastěji modální, FD, FE)

# Marcatiliho metoda (separace proměnných)

$$\Delta_{\perp} \mathbf{e}(x, y) + \underbrace{\nabla_{\perp} \left[ \nabla_{\perp} (\ln \varepsilon) \cdot \mathbf{e}_{\perp} \right]}_{\text{Zanedbáme - malý člen}} + k_0^2 \left[ n^2(x, y) - N^2 \right] \mathbf{e}(x, y) = 0 \quad \text{Separace proměnných:}$$

$$n^2(x, y) \stackrel{!}{=} n_x^2(x) + n_y^2(y) - \text{const}$$

Předpoklad:  $e(x, y) = e_x(x) e_y(y)$

$$\frac{d^2 e_x(x)}{dx^2} + k_0^2 \left[ n_x^2 - N_x^2 \right] e_x(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 e_y(y)}{dy^2} + k_0^2 \left[ n_y^2 - N_y^2 \right] e_y(y) = 0,$$

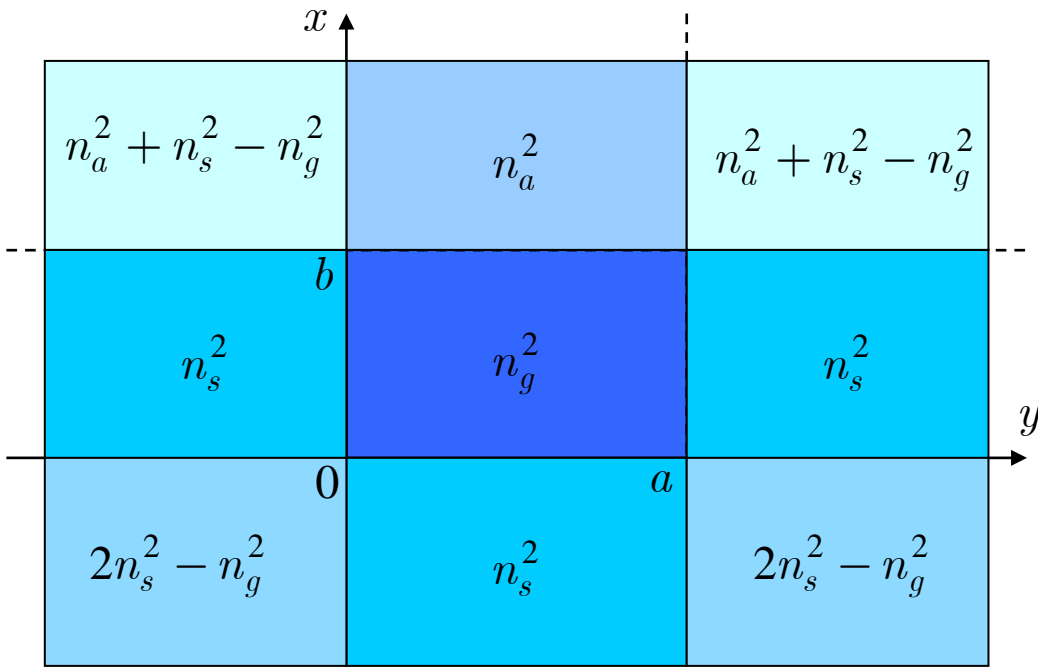
$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 - \text{const}$$

K tomu je třeba modifikovat profil  $n(x)$  v rohových oblastech:

volme např.  $\text{const} = n_g^2$

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 - n_g^2$$

Výhoda: jednoduchost;  
stačí řešit planární vlnovod  
jednou ve směru  $x$  a jednou v  $y$

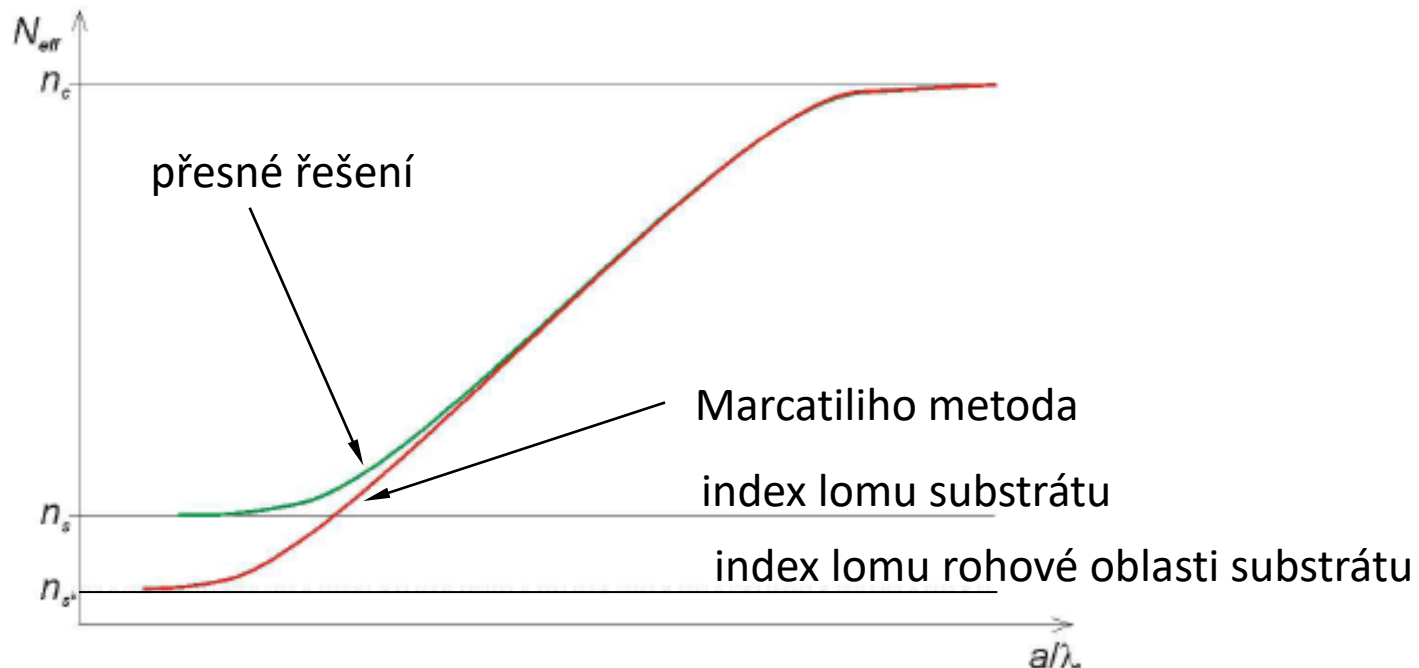


$$n_x^2 = \begin{cases} n_a^2, & x > b \\ n_g^2, & 0 < x < b, \\ n_s^2, & x < 0 \end{cases} \quad n_y^2 = \begin{cases} n_s^2, & y < 0 \\ n_g^2, & 0 < y < a, \\ n_s^2, & y > a \end{cases}$$

Nevýhoda: malá přesnost blízko kritické frekvence (pole slabě vedené)

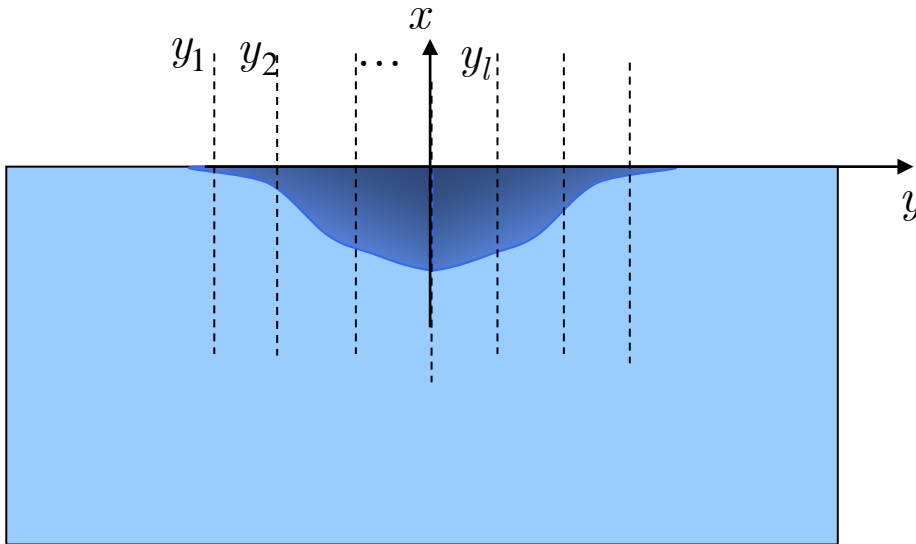
# Porovnání výsledků Marcatiliho metody s přesným řešením

Čím je vid slaběji vedený, tím větší část jeho energie se šíří v rohových oblastech; efektivní index lomu se pro velmi slabě vedoucí vlnovody blíží indexu lomu v rohových oblastech substrátu.





# Metoda efektivního indexu lomu pro difúzní vlnovody



$$\Delta_{\perp} e(x, y) + k_0^2 [n^2(x, y) - N^2] e(x, y) = 0$$

1. Předpoklad slabší závislosti na  $y$

$$e(x, y) \cong e_x(x; y) e_y(y)$$

$$\frac{d^2 e_x(x; y)}{dx^2} + k_0^2 [n^2(x; y) - N_x^2(y)] e_x(x; y) = 0$$

Řešíme hloubkovou rovnici pro různá  $y$ .  
Získáme  $N_x(y)$ .

2. Řešíme „laterální“ rovnici

$$\frac{d^2 e_y(y)}{dy^2} + k_0^2 [N_x^2(y) - N^2] e_y(y) = 0.$$

Výhoda: jednoduchost, intuitivnost.

Nevýhoda: menší přesnost, zejména v blízkosti kritické frekvence.

# “Rigorózní” metoda výpočtu vedených vidů 2D vlnovodů

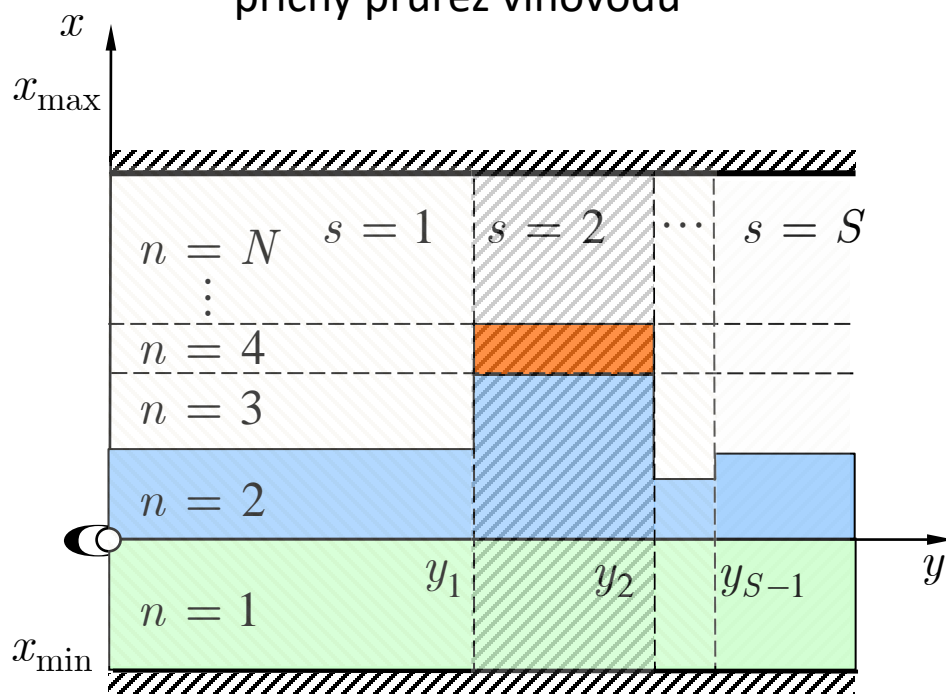
**Metoda přímek** (Method of Lines, MoL) – vyžaduje 1D diskretizaci, ~FD metoda

R. Pregla a jeho žáci, Fern-Universität Hagen, SRN

## Metoda sešívání vidů (Film Mode Matching, FMM)

(mikrovlny 1950++, fotonika Sudbø 1993, 1994)

příčný průřez vlnovodu



Příčné rozložení indexu lomu  
musí být po částech konstantní

- Průřez rozdělíme na laterálně uniformní „řezy“; každý řez představuje multivrstvu
- Najdeme TE a TM vidy v každém řezu
- Celkové pole vyjádříme jako superpozici TE a TM vidů
- Na rozhraních mezi řezy splníme podmínky spojitosti tečných složek

Stabilní formalismus  
„immitanční“ (admitanční, impedanční,  
metoda rozptylové matice);  
vektorové řešení

# Základy metody FMM

Normování:

$$(\xi, \eta, \zeta) = k_0(x, y, z), \quad \bar{\nabla} = \frac{1}{k_0} \nabla, \quad k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_0}.$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sqrt{2Z_0} k_0 \mathbf{e}(\xi, \eta, \zeta), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \sqrt{2Y_0} k_0 \mathbf{h}(\xi, \eta, \zeta).$$

Maxwellovy rovnice pak mají tvar  $\bar{\nabla} \times \mathbf{e} = i \mathbf{h}$ ,  $\bar{\nabla} \times \mathbf{h} = -i \varepsilon \mathbf{e}$ .

$\varepsilon(\xi, \eta)$  je relativní permitivita vlnovodu závislá pouze na příčných souřadnicích

Pole v každém řezu nezávislém na  $y$ -souřadnici lze spočítat z *derivací dvou skalárních funkcí* – Hertzových „vektorů“ (o jediné složce):

$$\boldsymbol{\pi}^h = \mathbf{x}^0 \sum_m f_m^h(\xi) p_m^h(\eta) e^{iN_z \zeta}, \quad \boldsymbol{\pi}^e = \mathbf{x}^0 \sum_m f_m^e(\xi) p_m^e(\eta) e^{iN_z \zeta},$$

↙ ↘ laterální závislost amplitud ↙ ↘  
↙ ↘ „vertikální vidové funkce“ ↙ ↘  $e^{i\beta z} = e^{ik_0 N_z z} = e^{iN_z \zeta}$

Známe-li  $\boldsymbol{\pi}$ , úplné vektorové pole pak spočítáme pomocí vztahů

$$\mathbf{e}^h = i \bar{\nabla} \times \boldsymbol{\pi}^h, \quad \mathbf{h}^h = \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \boldsymbol{\pi}^h,$$

$$\mathbf{e}^e = \frac{1}{\varepsilon} \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \boldsymbol{\pi}^e, \quad \mathbf{h}^e = -i \bar{\nabla} \times \boldsymbol{\pi}^e.$$

## Základy metody FMM – 2

Hertzovy vektory splňují Helmholtzovu rovnici

$$\Delta \pi^{h,e} + \varepsilon \pi^{h,e} = 0,$$

Ta je splněna, pokud „vidové funkce“  $f$  splňují rovnice

$$\frac{d^2 f^h(\xi)}{d\xi^2} + \left[ \varepsilon(\xi) - (N_x^h)^2 \right] f^h(\xi) = 0, \quad \varepsilon \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{df^e}{d\xi} \right) + \left[ \varepsilon(\xi) - (N_x^e)^2 \right] f^e(\xi) = 0.$$

a laterální závislosti  $p^h(\eta)$ ,  $p^e(\eta)$  jsou řešením rovnic

$$\frac{d^2 p^{h,e}}{d\eta^2} + (N_y^{h,e})^2 p^{h,e} = 0, \quad \text{přičemž} \quad (N_y^{h,e})^2 + N_z^2 = (N_x^{h,e})^2,$$

Z rovnic pro  $p^{h,e}(h)$  pak snadno odvodíme “laterální přenosovou matici”

$$\begin{pmatrix} p(\eta + \Delta\eta) \\ q(\eta + \Delta\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[N_y \Delta\eta] & \frac{1}{N_y} \sin[N_y \Delta\eta] \\ -N_y \sin[N_y \Delta\eta] & \cos[N_y \Delta\eta] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(\eta) \\ q(\eta) \end{pmatrix}, \quad \text{kde } q(\eta) = \frac{dp(\eta)}{d\eta}.$$

## Základy metody FMM – 3

Úplné vektorové pole v  $s$ -tém řezu je dáno superpozicí vidů:

TE

$$\begin{aligned}
 {}^s e_x^h(\xi, \eta) &= 0, & {}^s h_x^h(\xi, \eta) &= \sum_m \left( {}^s N_{xm}^h \right)^2 {}^s p_m^h {}^s f_m^h(\xi), \\
 {}^s e_y^h(\xi, \eta) &= -N_z \sum_m {}^s p_m^h {}^s f_m^h(\xi), & {}^s h_y^h(\xi, \eta) &= \sum_m {}^s q_m^h {}^s g_m^h(\xi), \\
 {}^s e_z^h(\xi, \eta) &= -i \sum_m {}^s q_m^h {}^s f_m^h(\xi), & {}^s h_z^h(\xi, \eta) &= i N_z \sum_m {}^s p_m^h {}^s g_m^h(\xi).
 \end{aligned}$$

a TM

$$\begin{aligned}
 {}^s e_x^e(\xi, \eta) &= \frac{1}{{}^s \varepsilon(\xi)} \sum_m \left( {}^s N_{xm}^e \right)^2 {}^s p_m^e {}^s f_m^e(\xi), & {}^s h_x^e(\xi, \eta) &= 0, \\
 {}^s e_y^e(\xi, \eta) &= \sum_m {}^s q_m^e {}^s g_m^e(\xi), & {}^s h_y^e(\xi, \eta) &= N_z \sum_m {}^s p_m^e {}^s f_m^e(\xi), \\
 {}^s e_z^e(\xi, \eta) &= i N_z \sum_m {}^s p_m^e {}^s g_m^e(\xi), & {}^s h_z^e(\xi, \eta) &= i \sum_m {}^s q_m^e {}^s f_m^e(\xi)
 \end{aligned}$$

kde

$${}^s g_m^h = \frac{d {}^s f_m^h}{d \xi}, \quad {}^s g_m^e(\xi) = \frac{1}{{}^s \varepsilon(\xi)} \frac{d {}^s f_m^e}{d \xi}.$$

## Základy metody FMM – 4

Šíření vidů uvnitř téhož „řezu“ je popsáno “laterální přenosovou maticí”.

Na hranicích mezi řezy musí být spojité tečné složky intenzit polí.

S využitím ortogonálních vlastností polí vlastních vidů a identit plynoucích z vlnové rovnice získáme transformační vztahy mezi “laterálními amplitudami”  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  mezi řezy  $s$  a  $t$  v maticovém tvaru s diagonálními maticemi  ${}^s\mathbf{N}_x^{h,e}$ ,  ${}^t\mathbf{N}_x^{h,e}$

$${}^s\mathbf{p} = \left({}^s\mathbf{N}_x^2\right)^{-1} \cdot {}^{s,t}\mathbf{O} \cdot {}^t\mathbf{N}_x^2 \cdot {}^t\mathbf{p}, \quad {}^s\mathbf{q} = \left({}^{t,s}\mathbf{O}\right)^T \cdot {}^t\mathbf{q} - {}^{s,t}\mathbf{X} \cdot {}^t\mathbf{p},$$

kde

$${}^{s,t}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} {}^{s,t}\mathbf{O}^{hh} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{s,t}\mathbf{O}^{ee} \end{pmatrix}, \quad {}^{s,t}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & N_z {}^{s,t}\mathbf{O}^{he} \\ -N_z \left({}^{t,s}\mathbf{O}^{he}\right)^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

TE-TE

$$\rightarrow {}^{s,t}O_{mn}^{hh} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} {}^s f_m^h(\xi) {}^t f_n^h(\xi) d\xi,$$

$${}^{s,t}O_{mn}^{ee} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{{}^s f_m^e(\xi) {}^t f_n^e(\xi)}{{}^t \varepsilon(\xi)} d\xi,$$

TM-TM

TE-TM

$$\rightarrow {}^{s,t}O_{mn}^{he} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{{}^s f_m^h(\xi)}{{}^t \varepsilon(\xi)} \frac{d {}^t f_n^e(\xi)}{d\xi} d\xi + \frac{{}^t N_{xn}^{e2}}{{}^s N_{xm}^{h2}} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d {}^s f_m^h(\xi)}{d\xi} \frac{{}^t f_n^e(\xi)}{{}^t \varepsilon(\xi)} d\xi.$$

## Základy metody FMM – 5

Poněvadž formulace založená na přenosové matici je nestabilní, použijeme s výhodou **immitanční (impedanční resp. admitanční) formulaci**:

Zavedeme immitanční matici  $\mathbf{U}$  vztahem

$$\mathbf{q}(\eta) = \mathbf{U}(\eta) \cdot \mathbf{p}(\eta).$$

Pro transformaci immitanční matice uvnitř jednoho (laterálně homogenního) řezu lze z maticové rovnice pro  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  odvodit vztah

$$\mathbf{U}(\eta + \Delta\eta) = \mathbf{T}(\eta) - \mathbf{S}(\eta) \cdot [\mathbf{U}(\eta) + \mathbf{T}(\eta)]^{-1} \cdot \mathbf{S}(\eta),$$

kde

$$\mathbf{S}(\eta) = \mathbf{N}_y \cdot \sin^{-1}(\mathbf{N}_y \Delta\eta), \quad \mathbf{T}(\eta) = \mathbf{N}_y \cdot \tan^{-1}(\mathbf{N}_y \Delta\eta).$$

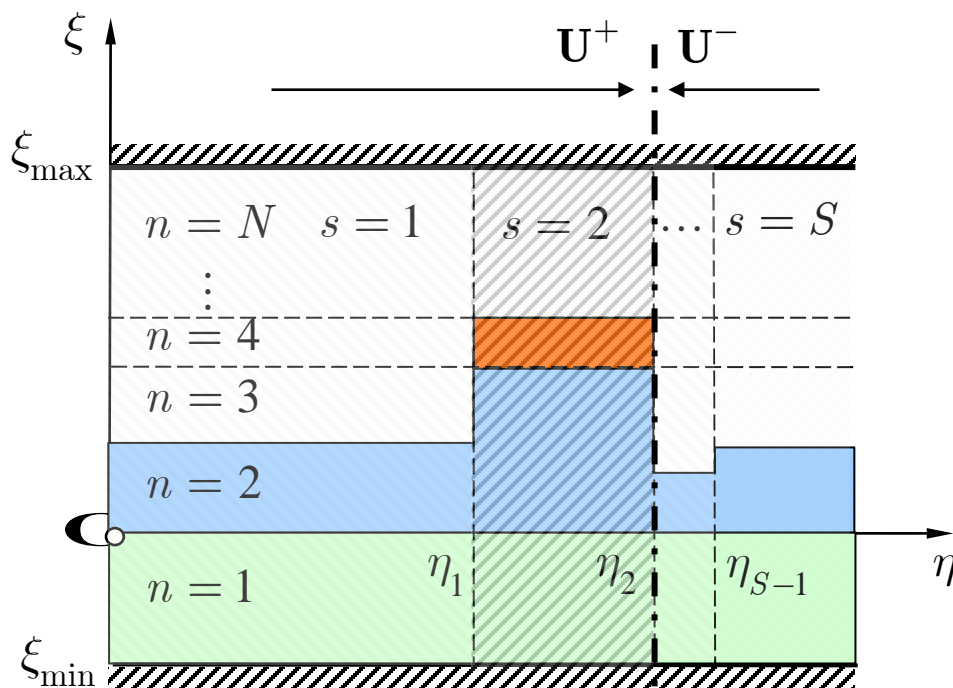
Pro transformaci matice  $\mathbf{U}$  mezi řezy  $s$  a  $t$  pak dostaneme

$${}^t\mathbf{U} = ({}^{s,t}\mathbf{O})^T \cdot \left[ {}^s\mathbf{U} \cdot ({}^s\mathbf{N}_x^2)^{-1} \cdot {}^{s,t}\mathbf{O} \cdot {}^t\mathbf{N}_x^2 + {}^{s,t}\mathbf{X} \right].$$

Podobné relace platí i pro transformace ve zpětném směru souřadnice  $\eta$ .

## Základy metody FMM – 6

Disperzní rovnice je vytvořena podobně jako u planární multivrstvy.



Okrajové podmínky ve vnějších řezech určují hodnotu impedancí resp. admitancí; pro otevřené struktury platí

$$\mathbf{U} = \pm i \mathbf{N}_y,$$

zatímco pro dokonale vodivé stěny platí

$$\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{or} \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{0}.$$

Postupné transformace matice  $\mathbf{U}$  z obou stran do vhodně zvoleného místa průřezu

dají  $\mathbf{U}^+$  and  $\mathbf{U}^-$

a disperzní rovnice pro  $N_z$  and  $\mathbf{p}$  je pak

$$(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

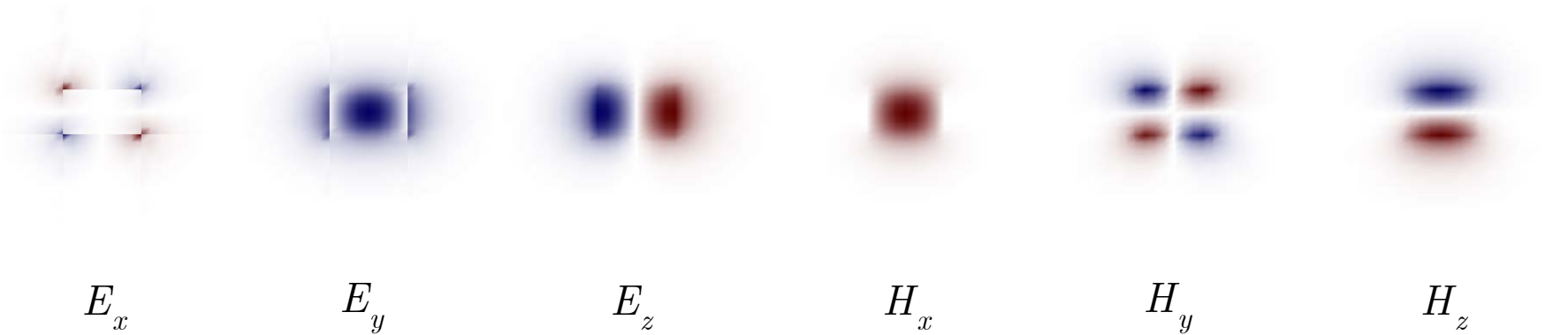
Z podmínky nulového determinantu určíme  $N_z$  a k němu pak najdememe vektor amplitud pole  $\mathbf{p}$ .



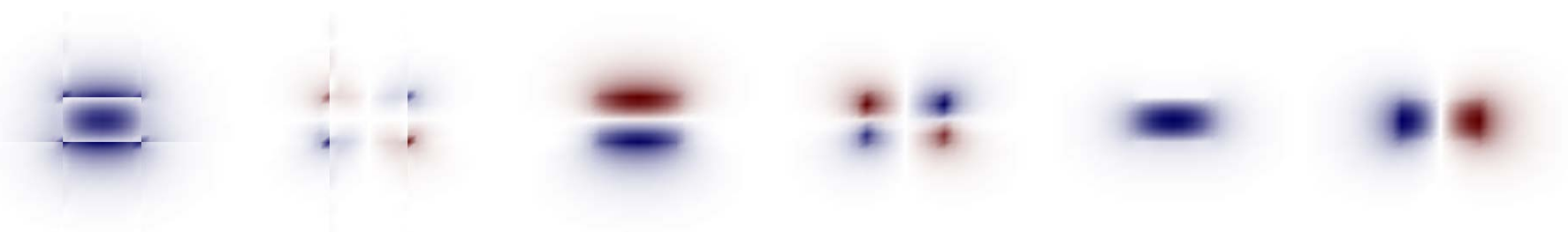
# Příklad vektorového rozložení pole

Vlnovod „SOI“, příčné rozměry 400×300 nm<sup>2</sup>,  $l = 1550$  nm

Vid TE<sub>00</sub>

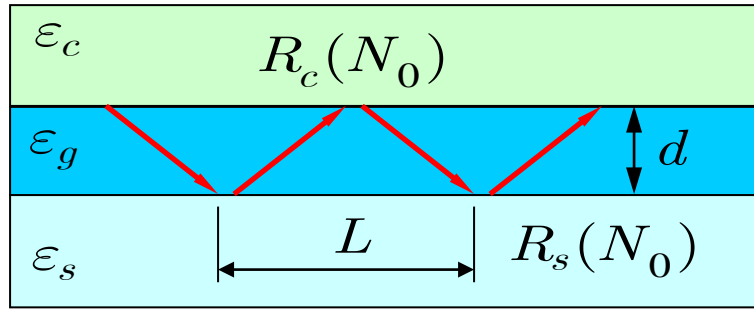


Vid TM<sub>00</sub>

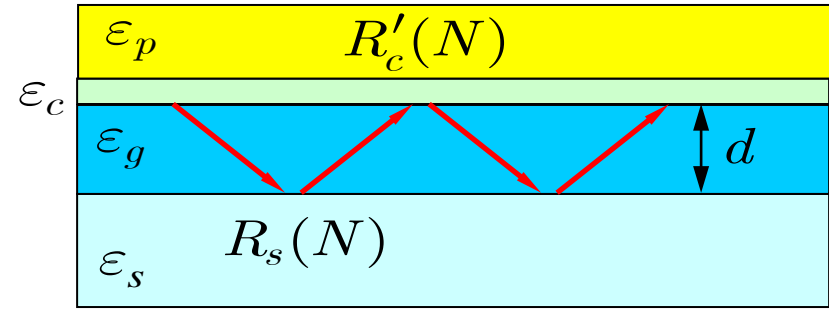


# Jednoduchá poruchová teorie pro planární vlnovod I

Neporušený vlnovod



Vlnovod s „poruchou“ (hranolem)



Disperzní rovnice: neporušený vlnovod:

$$R_s(N_0)R_c(N_0)e^{2ik_0d\sqrt{\varepsilon_g - N_0^2}} = 1$$

‘porušený’ vlnovod:

$$R_s(N)R'_c(N)e^{2ik_0d\sqrt{\varepsilon_g - N^2}} = 1$$

$$S_0(N) = 2k_0d\sqrt{\varepsilon_g - N^2} - 2\arctan\left[\left(\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_s}\right)^\nu \sqrt{\frac{N^2 - \varepsilon_s}{\varepsilon_g - N^2}}\right] - 2\arctan\left[\left(\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_c}\right)^\nu \sqrt{\frac{N^2 - \varepsilon_c}{\varepsilon_g - N^2}}\right] - 2m\pi$$

$$= 2k_0d\sqrt{\varepsilon_g - N^2} + i(\ln R_s + \ln R_c) - 2m\pi = 0, \quad \text{řešení je } N_0: \quad S_0(N_0) = 0$$

„Porušený“ vlnovod (s hranolem v blízkosti povrchu):

$$S(N) = 2k_0d\sqrt{\varepsilon_g - N^2} + i(\ln R_s + \ln R'_c) - 2m\pi = 0, \quad \text{řešení je } N.$$

$R'_c(N)$  je výsledný činitel odrazu od „porušené“ vlnovodné struktury.

## Jednoduchá poruchová teorie pro planární vlnovod II

$$S_0(N_0) = 2k_0 d \sqrt{\varepsilon_g - N_0^2} + i [\ln R_s(N_0) + \ln R_c(N_0)] - 2m\pi = 0, \quad \text{„neporušená“ rovnice}$$

$$S(N) = 2k_0 d \sqrt{\varepsilon_g - N^2} + i [\ln R_s(N) + \ln R'_c(N)] - 2m\pi = 0,$$

$$S(N) = S(N_0 + \Delta N) \approx S(N_0) + (dS / dN) \Big|_{N_0} \Delta N; \quad \text{„porušená“ rovnice v 1. aprox.}$$

$$2k_0 d \sqrt{\varepsilon_g - N_0^2} + i [\ln R_s(N_0) + \ln R'_c(N_0)] - 2m\pi + (dS / dN) \Big|_{N_0} \Delta N;$$

$$\underbrace{S_0(N_0)}_0 + i [\ln R'_c(N_0) - \ln R_c(N_0)] + (dS_0 / dN) \Big|_{N_0} \Delta N = 0, \quad \text{derivaci aproximujeme pomocí } S_0$$

$$\Delta N \approx -i [\ln R'_c(N_0) - \ln R_c(N_0)] / (dS_0 / dN) \Big|_{N_0}$$

$$L = -\frac{1}{k_0} \frac{dS_0}{dN} \Big|_{N_0} \quad \text{„perioda šíření“ ve vlnovodu („Goosův-Hänchenův posuv“);}$$

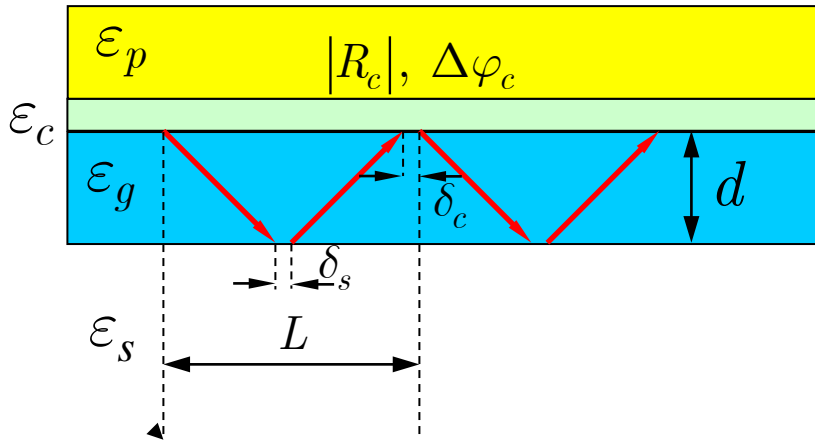
$$\ln R'_c = \ln |R'_c| + i \arg R'_c,$$

$$\Delta N \approx \left\{ [\arg\{R_c(N_0)\} - \arg\{R'_c(N_0)\}] - i \ln |R'_c(N_0)| \right\} / (k_0 L)$$

změna ef. indexu lomu vlivem malé poruchy

# Fyzikální interpretace metody

Vlnovod s poruchou



$$R_s(N_0)R_c(N_0)e^{2ik_0d\sqrt{\epsilon_g-N_0^2}} = 1$$

$$R_s(N)R'_c(N)e^{2ik_0d\sqrt{\epsilon_g-N^2}} = 1$$

$$e^{ik_0\Delta NL} = e^{i\Delta\varphi_c} e^{\ln|R'_c|} = |R'_c| e^{i\Delta\varphi}$$

Při šíření na vzdálenost „jedné periody“ se fáze vlny změní o  $\Delta\varphi_c$  a amplituda  $|R'_c|$  krát

$\Delta\varphi \approx \arg\{R'_c(N_0)\} - \arg\{R_c(N_0)\}$   
změna fáze vlivem změny činitele odrazu

$|R'_c|$  změna amplitudy pole při jednom odrazu

„Perioda šíření“

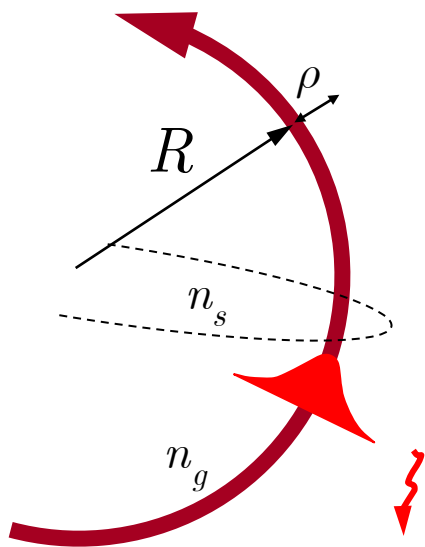
$$L = -\frac{1}{k_0} \frac{dS_0}{dN} \Big|_{N_0} =$$

$$= \frac{2dN_0}{\sqrt{\epsilon_g - N_0^2}} + \frac{d}{d(k_0N)} [\arg R_s(N)] + \frac{d}{d(k_0N)} [\arg R_c(N)] = \frac{2dN_0}{\sqrt{\epsilon_g - N_0^2}} + \delta_s + \delta_c$$

Goosův-Hänchenův posuv při totálním odrazu

# Šíření optického záření v zakřivených vlnovodech

## Každý zakřivený dielektrický vlnovod vyzařuje



Fázová rychlost vlny lineárně roste s poloměrem; pro velké poloměry by překročila rychlost světla v substrátu. Odpovídající část přenášeného výkonu je vyzářena do okolí

$$v(r) = v(R + \rho) = \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)v(R) \leq \frac{c}{n_s},$$

$$N = N' + iN'', \quad N'' > 0,$$

$$\exp(ik_0 Nz) = \exp(ik_0 N'z) \exp(-k_0 N''z)$$

Záření Čerenkovova typu („rychlá“ vlna).

Pomocí poruchové metody je možno ukázat, že

$$N'' \approx 2 \frac{\sqrt{N^2 - n_s^2} (n_g^2 - N^2)}{k_0 N d (n_g^2 - n_s^2)} \exp \left[ -\frac{2}{3} k_0 R \frac{(N^2 - n_s^2)^{3/2}}{n_s^2} \right]$$

# Metody analýzy zakřivených vlnovodů

## Metoda konformního zobrazení pro 2D (planární) vlnovod

Přímý vlnovod: 
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(x) E = 0$$
$$E(x, z) = E(x) \exp(ik_0 N z)$$

Zakřivený vlnovod:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_0^2 n^2(r) E = 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

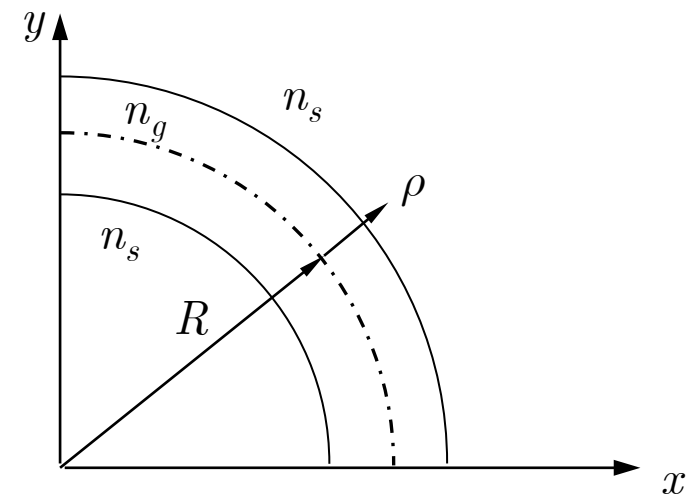
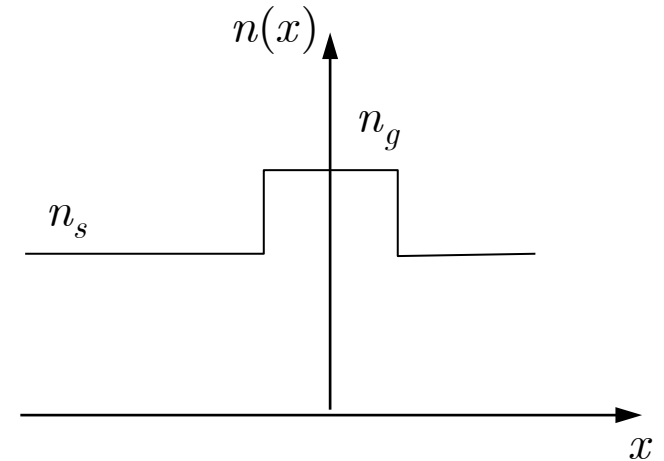
Komplexní proměnná  $z = x + iy = r e^{i\varphi}$

Konformní zobrazení  $w = u + iv$

$$w = u + iv = R \ln \frac{z}{R} = R \ln \frac{r}{R} + iR\varphi,$$

$$u = R \ln \frac{r}{R}, \quad v = R\varphi$$

$$\frac{r}{R} = \exp\left(\frac{u}{R}\right), \quad \varphi = \frac{v}{R}$$



# Metoda konformního zobrazení pro 2D (planární) vlnovod

Konformní zobrazení transformuje vlnovou rovnici do tvaru

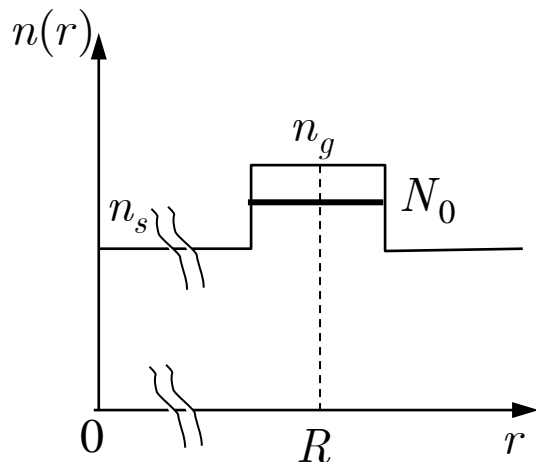
$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + k_0^2 \underbrace{\frac{r^2}{R^2} n^2(r)}_{n_{eq}^2(u)} E = 0$$

$$n_{eq}(u) = \frac{r}{R} n(r) = \exp\left(\frac{u}{R}\right) n\left[R \exp\left(\frac{u}{R}\right)\right] \dots \text{ekvivalentní profil přímého vlnovodu}$$

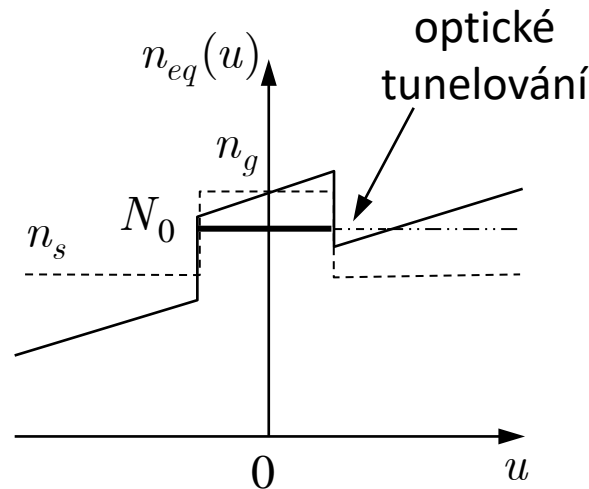
Ekvivalentní profil:  $r = R + \rho, \rho \ll R, \frac{u}{R} = \ln \frac{r}{R} = \ln \frac{R + \rho}{R} \approx \frac{\rho}{R}, u \approx \rho,$

$$\exp\left(\frac{u}{R}\right) \approx \exp\left(\frac{\rho}{R}\right) \approx 1 + \frac{\rho}{R}, \quad n_{eq}(u) \approx \left(1 + \frac{u}{R}\right) n\left[R\left(1 + \frac{u}{R}\right)\right] \approx \frac{r}{R} n(r)$$

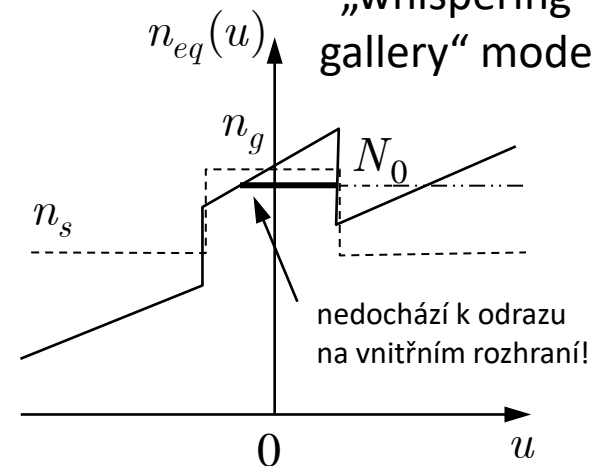
Původní profil



Ekvivalentní profil

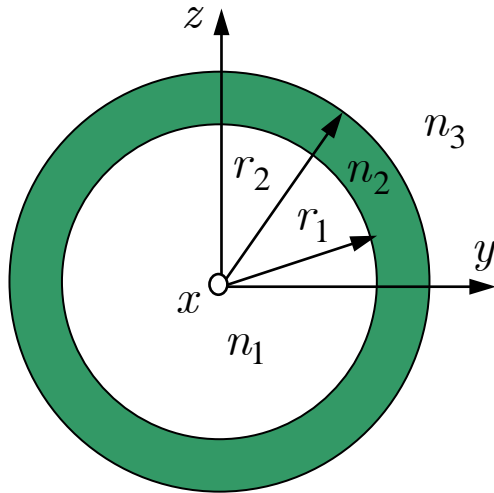


Silný ohyb: „whispering gallery“ mode

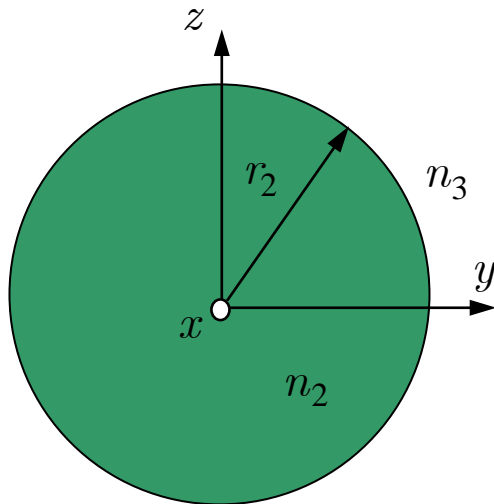


# Rigorózní řešení vlnové rovnice zakřiveného 2D vlnovodu

prstenec



$$n_2 > n_1, n_3,$$



disk  $n_2 > n_3$

Polarizace:  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{x}^0$ ;  $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$  (kolmo k rovině zakřivení)

$$\mathbf{E}(r, \varphi) = E_x(r, \varphi) \mathbf{x}^0 = \psi(r) \exp(i\nu\varphi) \mathbf{x}^0$$

Vlnová rovnice (z Maxwellových rovnic)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}_0 - \Delta \mathbf{E} = -k_0^2 n^2(r) \mathbf{E},$$

$$\Delta_{\perp} E_x + k_0^2 n^2(r) E_x = 0,$$

Besselova rovnice

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + (k_0^2 n^2 r^2 - \nu^2) \psi(r) = 0,$$

prstenec:

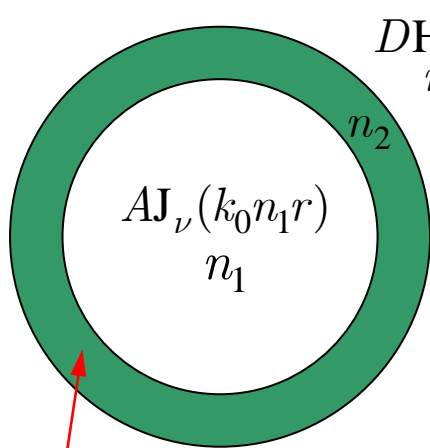
$$n(r) = \begin{cases} n_1, & r \leq r_1, \\ n_2, & r_1 < r \leq r_2, \\ n_3, & r > r_2 \end{cases}$$

disk:

$$n(r) = \begin{cases} n_2, & r \leq r_2 \\ n_3, & r > r_2 \end{cases}$$



# Zakřivený vlnovod, nebo mikrozónátor?



$$BJ_\nu(n_2\rho) + \\ + CY_\nu(n_2\rho)$$

$$DH_\nu^{(1)}(n_3\rho)$$

$$\rho = k_0 r$$

Podmínky spojitosti na rozhraních  $r_1, r_2$

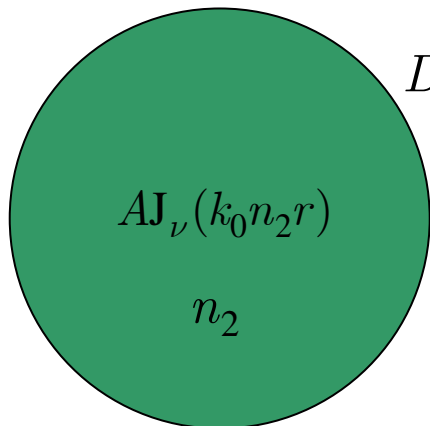
$E_x$  spojité  $\Rightarrow$

$\psi(r)$  spojité

$H_\varphi$  spojité  $\Rightarrow$

$\frac{\partial\psi(r)}{\partial r}$  spojité

$$\begin{pmatrix} n_1 J'_\nu(n_1 \rho_1) & -n_2 J'_\nu(n_2 \rho_1) & -n_2 Y'_\nu(n_2 \rho_1) & 0 \\ J_\nu(n_1 \rho_1) & -J_\nu(n_2 \rho_1) & -Y_\nu(n_2 \rho_1) & 0 \\ 0 & -n_2 J'_\nu(n_2 \rho_2) & -n_2 Y'_\nu(n_2 \rho_2) & n_3 H_\nu^{(1)'}(n_3 \rho_2) \\ 0 & -J_\nu(n_2 \rho_2) & -Y_\nu(n_2 \rho_2) & H_\nu^{(1)}(n_3 \rho_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$DH_\nu^{(1)}(n_3\rho)$$

$$AJ_\nu(k_0 n_2 r)$$

$$n_2$$

$$\begin{pmatrix} n_2 J'_\nu(n_2 \rho_2) & n_3 H_\nu^{(1)'}(n_3 \rho_2) \\ J_\nu(n_2 \rho_2) & H_\nu^{(1)}(n_3 \rho_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\dots) = \Phi(\nu, \omega) = 0$$

...disperzní rovnice

pro  $\nu$  nebo  $\omega$

zakřivený vlnovod

rezonátor

# Rigorózní řešení rovnice pro 2D prstencový a diskový mikrozónátor

## Numerické problémy:

v blízkosti rezonance, pro  $r \approx R$ ,  $\omega \doteq \nu c / R n_2$ ,  $k_0 n_2 r = n_2 \rho \approx \nu$ ;

Programy pro výpočet cylindrických funkcí pro reálné i komplexní argumenty selhávají pro (velké) argumenty blízké řádu cylindrické funkce.

**Řešení: napsat vlastní program** (doktorand L. Prkna, obhájil 2004)

Základ: Uniformní asymptotický rozvoj

M. Abramovitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*,

Applied mathematics series – 55, NBS, Boulder, 1964

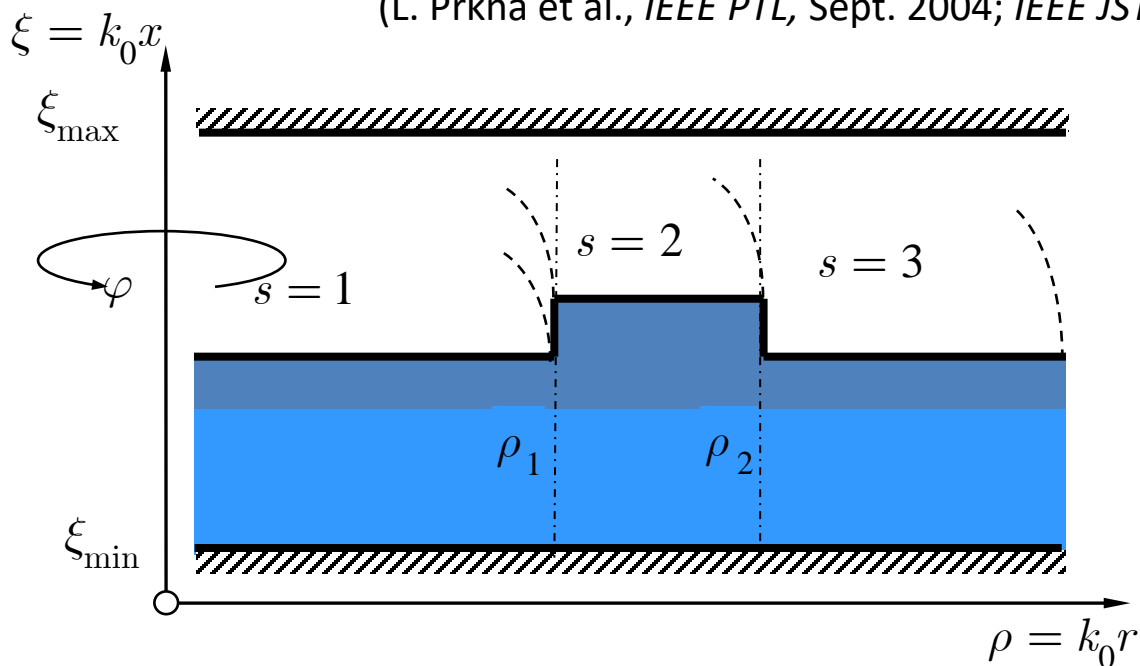
L. Prkna, PhD práce, MFF UK 2004

Kiran Hiremath, PhD práce, Uni Twente, 2005

...

# „FMM mode solver“ pro zakřivené vlnovody

(L. Prkna et al., *IEEE PTL*, Sept. 2004; *IEEE JSTQE*, Jan. 2005 )



Přístup velmi podobný jako u přímých vlnovodů; **radiální** závislost místo **laterální**.

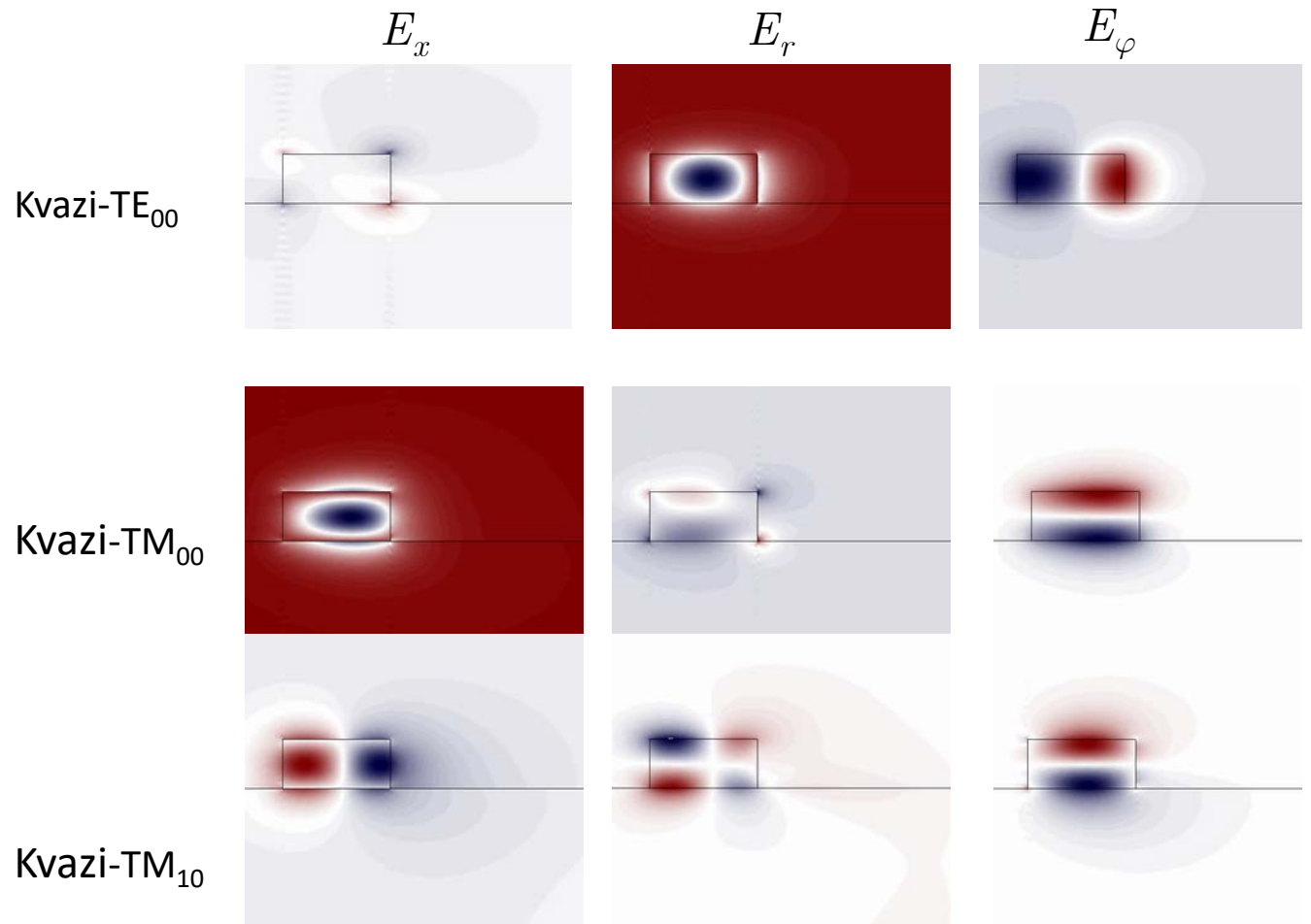
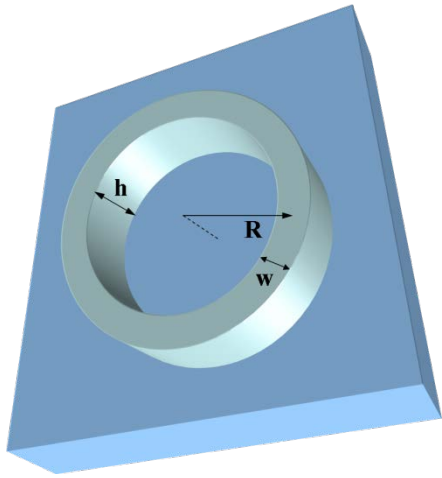
Problém: **Cylindrické** funkce místo trigonometrických.

1. rozdělení struktury na radiálně homogenní úseky („řezy“), každý řez je považován za multivrstvu.
  2. Pole v každém řezu je vyjádřeno pomocí TE a TM vidů multivrstvy.
  3. Na rozhraní mezi řezy jsou aplikovány podmínky spojitosti tečných složek.
- *Žádná* (nebo malá) *diskretizace*
  - Pole v každém řezu je popsáno *analyticky*

# Příklad rozložení pole v mikrorezonátoru s velkým kontrastem indexu lomu (SOI)

Si/SiO<sub>2</sub> prstencový mikrorezonátor,

$R = 2 \mu\text{m}$ ,  $n_{\text{Si}} = 3.5$ ,  $n_{\text{SiO}_2} = 1.45$ ,  $n_a = 1$ ,  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ ,  $h = 360 \text{ nm}$ ,  $w = 500 \text{ nm}$ .



# Složitější vlnovodné struktury: rigorózní formulace metody vázaných vidů

Výpočet pole v obecné vlnovodné struktuře pomocí rozkladu ve vlastní vidy podélně homogenního vlnovodu

1. Vlastní vidy vlnovodu s permitivitou  $\varepsilon^{(0)}(x, y)$ :
- $$\mathbf{E}_\mu(x, y, z) = A_\mu \mathbf{e}_\mu(x, y) e^{i\beta_\mu z},$$
- $$\mathbf{H}_\mu(x, y, z) = A_\mu \mathbf{h}_\mu(x, y) e^{i\beta_\mu z}$$
- Ortogonalita a úplnost spektra vlastních vidů

$$\frac{1}{2} \iint_S \mathbf{e}_\mu \times \mathbf{h}_\nu \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{e}_{\mu\perp} \times \mathbf{h}_{\nu\perp} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\beta_\mu}{|\beta_\mu|} \delta_{\mu\nu}$$

2. Obecný vlnovod s permitivitou  $\varepsilon(x, y, z)$ :

$$\mathbf{E}_\perp(x, z, y) = \sum_\mu \left[ a_\mu(z) \mathbf{e}_{\mu\perp}(x, y) + b_\mu(z) \mathbf{e}_{\mu\perp}(x, y) \right],$$

$$\mathbf{H}_\perp(x, z, y) = \sum_\mu \left[ a_\mu(z) \mathbf{h}_{\mu\perp}(x, y) - b_\mu(z) \mathbf{h}_{\mu\perp}(x, y) \right],$$

3. Přesné řešení vede na soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{da_\mu(z)}{dz} = i\beta_\mu a_\mu(z) + \sum_\nu \left[ K_{\mu\nu}^{++}(z) a_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{+-}(z) b_\nu(z) \right],$$

$$\frac{db_\mu(z)}{dz} = -i\beta_\mu b_\mu(z) + \sum_\nu \left[ K_{\mu\nu}^{-+}(z) a_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{--}(z) b_\nu(z) \right].$$

## Rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

$$a_\mu(z) = A_\mu(z) e^{i\beta_\mu z}, \quad b_\mu(z) = B_\mu(z) e^{-i\beta_\mu z}.$$

$$\frac{da_\mu}{dz} = e^{i\beta_\mu z} \frac{dA_\mu}{dz} + i\beta_\mu a_\mu, \quad \frac{db_\mu}{dz} = e^{-i\beta_\mu z} \frac{dB_\mu}{dz} - i\beta_\mu b_\mu.$$

Dosazením získáme

$$\frac{dA_\mu}{dz} = \sum_\nu \left[ K_{\mu\nu}^{++}(z) e^{-i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{+-}(z) e^{-i(\beta_\mu + \beta_\nu)z} B_\nu(z) \right],$$

$$\frac{dB_\mu}{dz} = \sum_\nu \left[ K_{\mu\nu}^{-+}(z) e^{i(\beta_\mu + \beta_\nu)z} A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{--}(z) e^{i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} B_\nu(z) \right].$$

$$K_{\mu\nu}^{pq} = pK_{\mu\nu} + qk_{\mu\nu}, \quad p, q = 1 \text{ nebo } -1,$$

$$K_{\mu\nu}(z) = \frac{i\omega\varepsilon_0}{4} \frac{|\beta_\mu|}{\beta_\mu} \iint_S \left[ \varepsilon(x, z, y) - \varepsilon^{(0)}(x, y) \right] \mathbf{e}_{\mu\perp} \cdot \mathbf{e}_{\nu\perp} dx dy,$$

$$k_{\mu\nu}(z) = \frac{i\omega\varepsilon_0}{4} \frac{|\beta_\mu|}{\beta_\mu^*} \iint_S \frac{\varepsilon^{(0)}(x, y)}{\varepsilon(x, y, z)} \left[ \varepsilon(x, z, y) - \varepsilon^{(0)}(x, y) \right] \mathbf{e}_{\mu z} \cdot \mathbf{e}_{\nu z} dx dy,$$

## „Bornovo přiblížení“ – aproximativní řešení

Soustavu rovnic zkusíme integrovat:

$$\int_0^z \frac{dA_\mu}{dz} dz \approx \int_0^z \sum_\nu \left[ K_{\mu\nu}^{++}(z) e^{-i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{+-}(z) e^{-i(\beta_\mu + \beta_\nu)z} B_\nu(z) \right] dz,$$
$$\int_0^z \frac{dB_\mu}{dz} dz \approx \int_0^z \sum_\nu \left[ K_{\mu\nu}^{-+}(z) e^{i(\beta_\mu + \beta_\nu)z} A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{--}(z) e^{i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} B_\nu(z) \right] dz,$$

Za předpokladu, že amplitudy se mění pomalu, pro nevelké  $z$  přibližně platí

$$A_\mu(z) \approx A_\mu(0) + \sum_\nu \left[ A_\nu(0) \int_0^z K_{\mu\nu}^{++}(z) e^{-i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} dz + B_\nu(0) \int_0^z K_{\mu\nu}^{+-}(z) e^{-i(\beta_\mu + \beta_\nu)z} dz \right],$$
$$B_\mu(z) \approx B_\mu(0) + \sum_\nu \left[ A_\nu(0) \int_0^z K_{\mu\nu}^{-+}(z) e^{i(\beta_\mu + \beta_\nu)z} dz + B_\nu(0) \int_0^z K_{\mu\nu}^{--}(z) e^{i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} dz \right].$$

Integrály jsou „významně nenulové“, pouze pokud integrované funkce neoscilují rychle.

# Rovnice vázaných vln pro pomalu proměnné amplitudy

Zjednodušíme soustavu rovnic ponecháním pouze členů splňujících podmínku fázového synchronismu:

$$\frac{dA_\mu}{dz} \approx K_{\mu\nu}^{++}(z) e^{-i(\beta_\mu - \beta_\nu)z} A_\nu(z)$$

Pro pomalu proměnné amplitudy přibližně platí  $A_\nu(z) \approx A_\nu(0)$ .

$$\begin{aligned} \text{Položme dále} \quad \beta_\mu - \beta_\nu &\approx \beta_\mu(\omega_0) - \beta_\nu(\omega_0) + \frac{d}{d\omega} [\beta_\mu(\omega) - \beta_\nu(\omega)] (\omega - \omega_0) \\ &\approx \beta_\mu(\omega_0) - \beta_\nu(\omega_0) + \frac{N_{\mu g} - N_{\nu g}}{c} (\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Pak pokud  $\beta_{\mu 0} = \beta_{\nu 0}$

$$T(z) = \frac{A_\mu(z)}{A_\nu(0)} \approx \int_0^z K_{\mu\nu}^{++}(z') e^{-i(\beta_\mu - \beta_\nu)z'} dz' \approx \int_0^z K_{\mu\nu}^{++}(z') e^{-i \left[ \frac{N_{\mu g} - N_{\nu g}}{c} (\omega - \omega_0) \right] z'} dz'.$$

**Spektrální charakteristika přenosu je přibližně dána Fourierovou transformací podélné závislosti činitele vazby**



## Vzájemná vazba dvou vln

Pro vazební délku podstatně delší než je délka záznejů mezi vidy se uplatní pouze členy blízke fázevému synchronismu:

Pro „dopřednou“ vazbu

$$\begin{aligned}\frac{dA_\mu}{dz} &= K_{\mu\mu}^{++}(z)A_\mu(z) && + K_{\mu\nu}^{++}(z)e^{-i(\beta_\mu - \beta_\nu)z}A_\nu(z), \\ \frac{dA_\nu}{dz} &= K_{\nu\mu}^{++}(z)e^{i(\beta_\mu - \beta_\nu)z}A_\mu(z) + K_{\nu\nu}^{++}(z)A_\nu(z),\end{aligned}$$

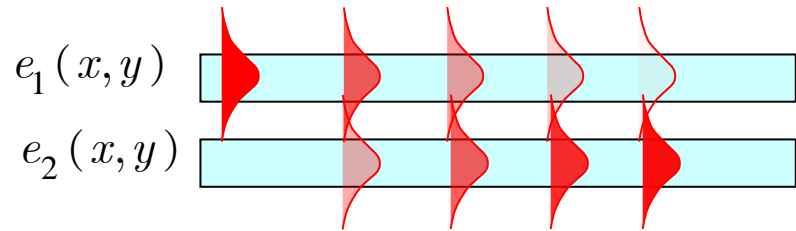
Pro „zpětnou“ vazbu

$$\begin{aligned}\frac{dA_\mu}{dz} &= K_{\mu\mu}^{++}(z)A_\mu(z) && + K_{\mu\nu}^{+-}(z)e^{-i(\beta_\mu + \beta_\nu)z}B_\nu(z) \\ \frac{dB_\nu}{dz} &= K_{\nu\mu}^{-+}(z)e^{i(\beta_\mu + \beta_\nu)z}A_\mu(z) + K_{\nu\nu}^{--}(z)B_\nu(z)\end{aligned}$$

# Aproximativní metoda vázaných vidů

Dvojice vázaných vlnovodů

nejsou ortogonální!



$$E(x, y, z) \approx a_1(z)e_1(x, y) + a_2(z)e_2(x, y)$$

$$\frac{da_1}{dz} = i\beta_1 a_1(z) + i\kappa_{12} a_2(z)$$

$$\frac{da_2}{dz} = i\kappa_{21} a_1(z) + i\beta_2 a_2(z)$$

Zachování výkonu v bezztrátové struktuře:

$$\frac{d}{dz} (a_1 a_1^* + a_2 a_2^*) = 0 \Rightarrow \kappa_{21} = \kappa_{12}^*$$

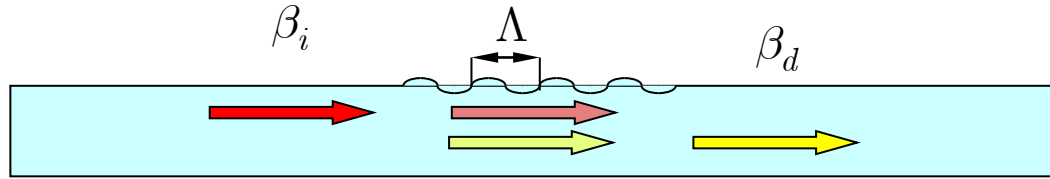
$$a_1(z) = a_1(0) e^{i\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z} \left[ \cos \delta z - i(\Delta\beta / 2) \sin \delta z \right], \quad \delta = \sqrt{(\Delta\beta / 2)^2 + |\kappa_{12} \kappa_{21}|},$$

$$a_2(z) = i a_1(0) \frac{\kappa}{\delta} e^{i\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z} \sin \delta z; \quad P_d(z) = |a_1(0)|^2 \left| \frac{\kappa}{\delta} \right|^2 \sin^2 \delta z.$$

Problém: neexistuje jednoznačný způsob výpočtu činitele vazby  
(úloha není exaktně formulována!)

Exaktní řešení ukážeme později.

# Aplikace teorie vázaných vidů: konverze vidů na vlnovodné mřížce



$$K_{\mu\nu}^{pq}(z) = \sum_m K_{\mu\nu,m}^{pq} e^{imKz}, \quad K = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \beta_d \approx \beta_i \pm mK$$

Pro  $m = 1$

$$\frac{dA_i}{dz} = i\kappa e^{i\Delta\beta z} A_d(z), \quad \Delta\beta = \beta_d - \beta_i - K$$

$$\frac{dA_d}{dz} = i\kappa^* e^{-i\Delta\beta z} A_i(z), \quad \kappa = iK_{d,i,1}^{++}$$

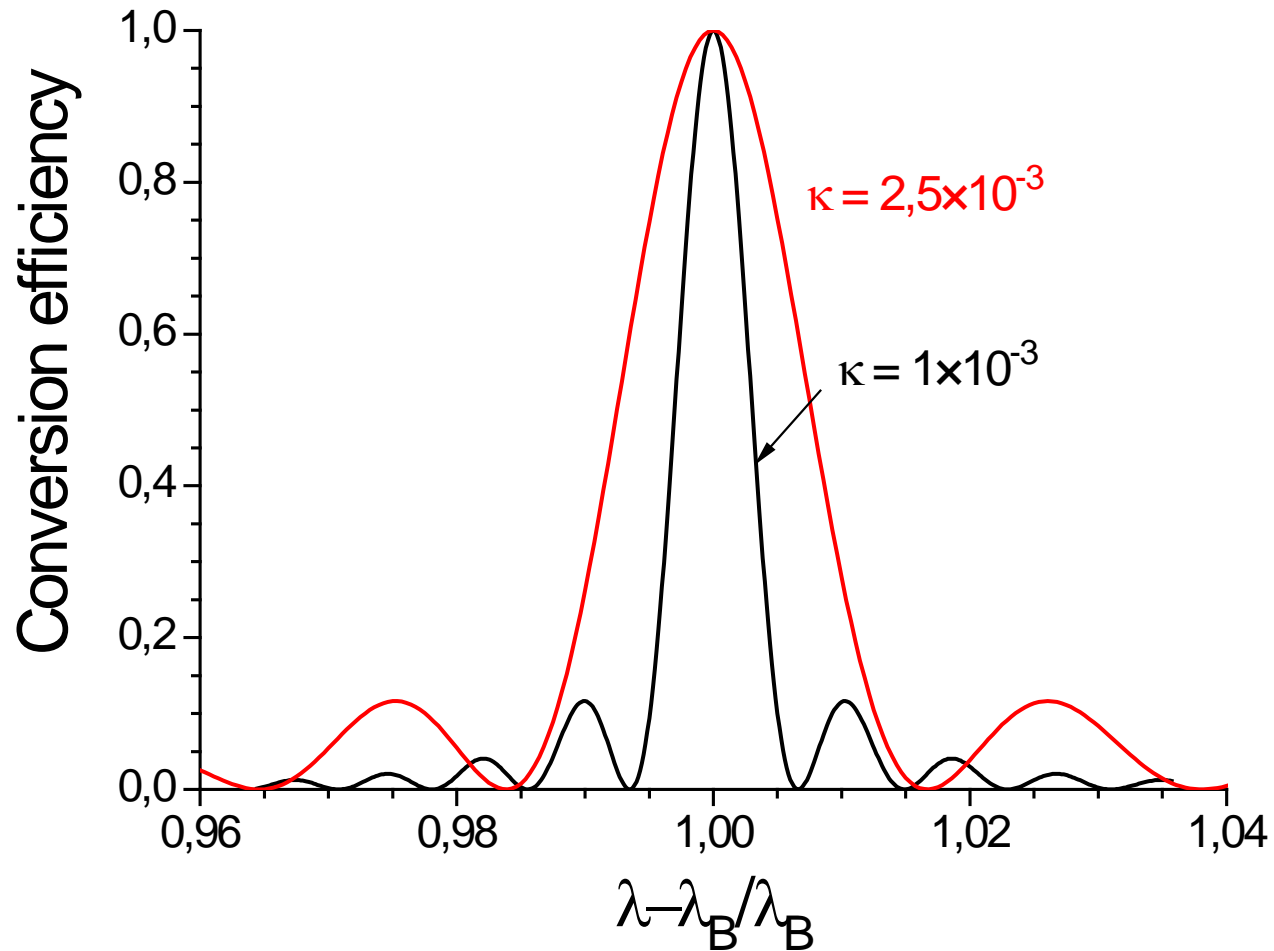
Řešení s počáteční podmínkou  $A_i(0) = A_{i0}, \quad A_d(0) = 0$  je

$$A_i(z) = A_{i0} e^{i\frac{\Delta\beta}{2}z} \left[ \cos \delta z - i \left( \frac{\Delta\beta}{2\delta} \right) \sin \delta z \right], \quad \delta = \sqrt{\left( \frac{\Delta\beta}{2} \right)^2 + |\kappa|^2}.$$

$$A_d(z) = iA_{i0} \frac{\kappa}{\delta} e^{-i\frac{\Delta\beta}{2}z} \sin \delta z; \quad |A_d(z)|^2 = |A_{i0}|^2 \left| \frac{\kappa}{\delta} \right|^2 \sin^2 \delta z.$$

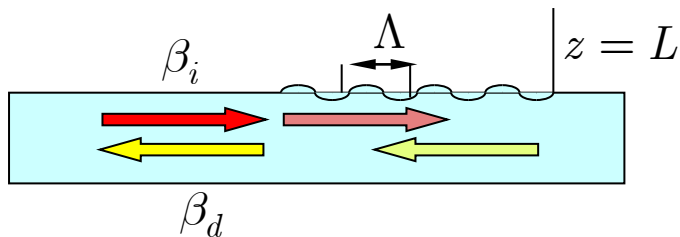
Pro  $\Delta\beta = 0 \quad |A_d(z)|^2 = |A_{i0}|^2 \sin^2 |\kappa|z \quad \text{Účinnost může být teoreticky 100\%}$

## Spektrální závislost konverze vidů na mřížce



„Dlouhá“ mřížka s malým činitelem vazby má úzkou spektrální křivku konverzní účinnosti

## Zpětný (braggovský) odraz na mřížce



$$\beta_d \approx \beta_i \pm mK; \quad \beta_d \approx \beta_i - K \approx -\beta_i$$

$$K \approx 2\beta_i$$

$$\frac{dA_i}{dz} = i\kappa e^{-i\Delta\beta z} B_d(z), \quad \Delta\beta = \beta_d + \beta_i - K$$

Řešení s okrajovými podmínkami

$$\frac{dB_d}{dz} = -i\kappa^* e^{i\Delta\beta z} A_i(z), \quad \kappa = iK_{d,i,1}^{++}$$

$$A_i(0) = A_{i0}, \quad B_d(L) = 0 \quad \text{je}$$

$$A_i(z) = \delta A_{i,0} \left[ \delta \cosh \delta z - i \left( \frac{\Delta\beta}{2} \right) \sinh \delta z \right]^{-1}, \quad \delta = \sqrt{|\kappa|^2 - \left( \frac{\Delta\beta}{2} \right)^2}$$

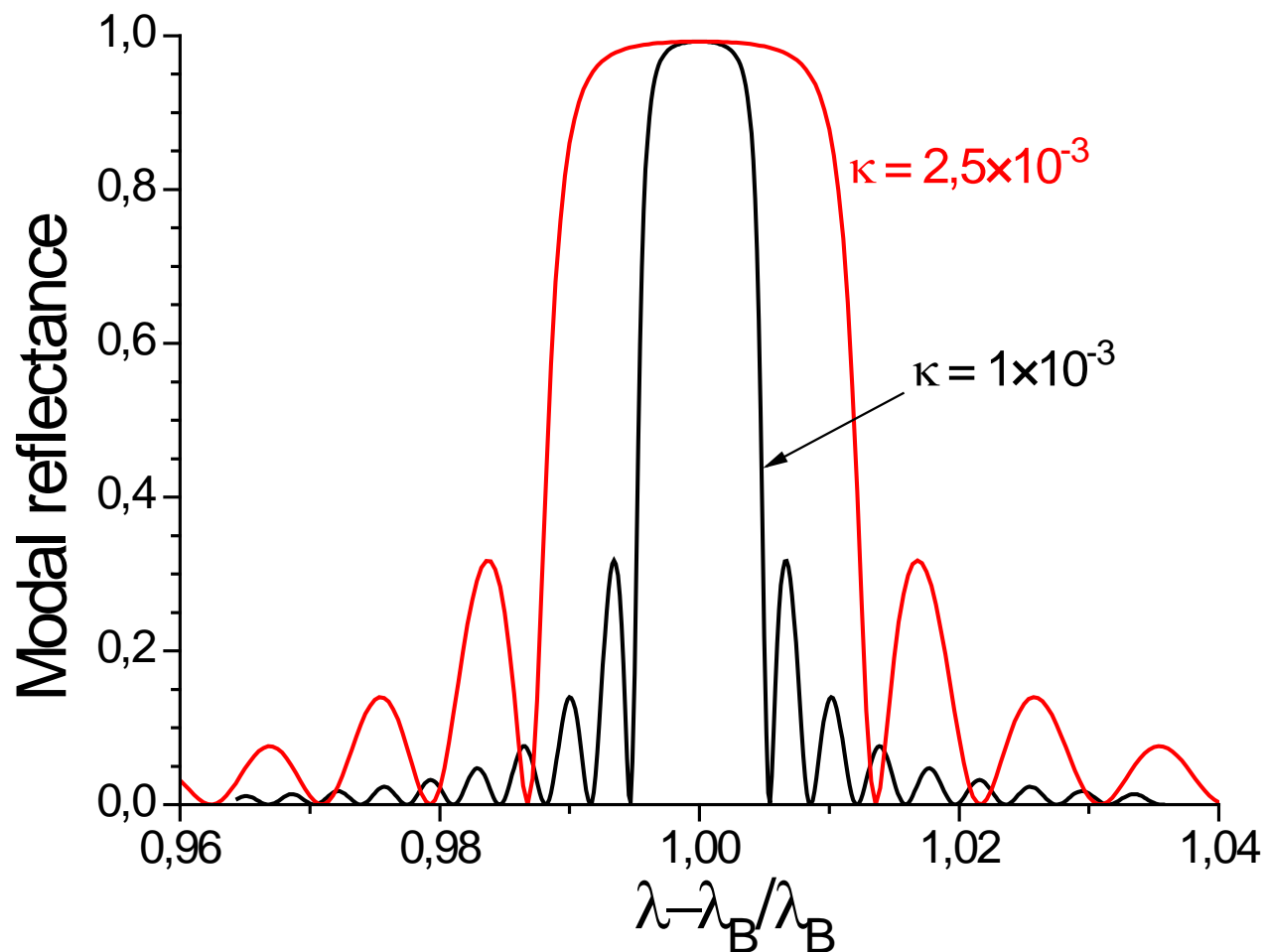
$$B_d(z) = i\kappa^* A_{i,0} e^{-i\frac{\Delta\beta}{2}z} \left[ \delta \coth \delta z - i \frac{\Delta\beta}{2} \right]^{-1}$$

Pro  $\Delta\beta = 0$

$$|R|^2 = \left| \frac{B_d(0)}{A_{i0}} \right|^2 = \left| \frac{\kappa \sinh \delta L}{\delta \cosh \delta L - i \left( \frac{\Delta\beta}{2} \right) \sinh \delta L} \right|^2$$

$$|R^2| = \tanh^2 |\kappa| L.$$

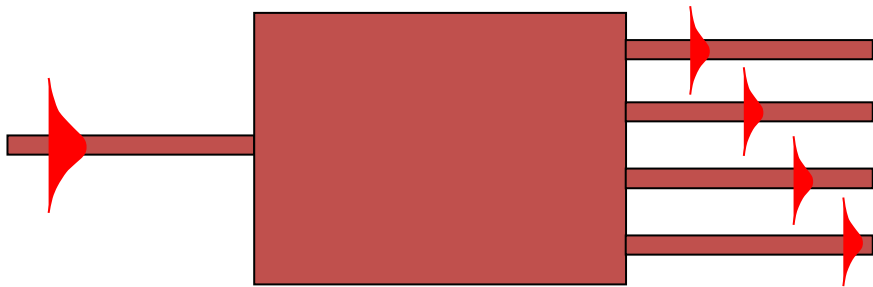
## Spektrální závislost účinnosti zpětného odrazu



Úzká spektrální křivka konverzní účinnosti vyžaduje malý činitel vazby a dlouhou mřížku

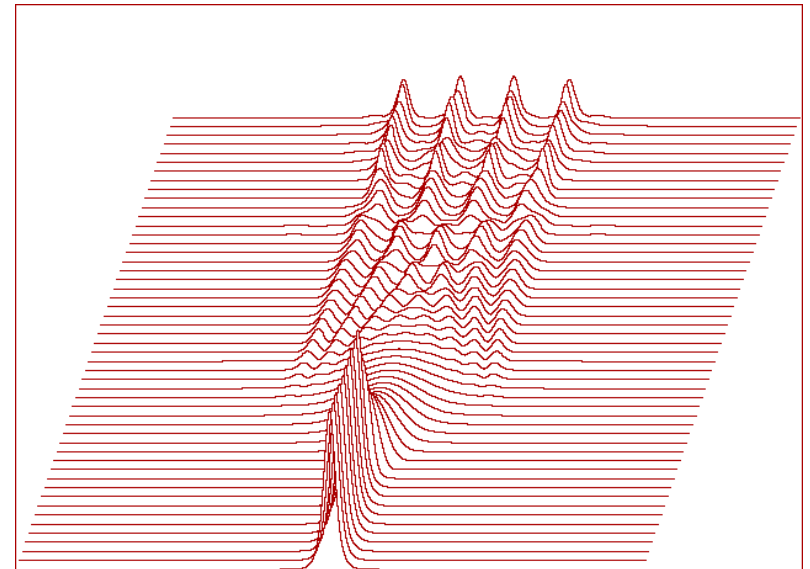
# Metody „šíření optického svazku“ (BPM)

Metody pro výpočet rozložení pole optického záření  
ve složitějších podélně nehomogenních vlnovodných strukturách



Složitější vlnovodná struktura

Rozložení optického záření



# Princip metody FFT BPM

Předpokládáme, že rozložení pole je popsáno Helmholtzovou vlnovou rovnicí (zanedbáváme vektorový charakter pole, aproximace pro „slabě vedoucí“ vlnovody

$$\Delta E + k_0^2 n^2(x, y, z) E = 0$$

Upravíme na tvar  $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -[\Delta_{\perp} E + k_0^2 n^2(x, y, z) E] = -\mathbb{L}^2 E$

neboli  $\frac{\partial E}{\partial z} = \pm i \mathbb{L} E = \pm i \sqrt{\Delta_{\perp} + k_0^2 n^2(x, y, z)} E$

Formální řešení:  $E(x, y, z + \Delta z) = \exp(i \Delta z \mathbb{L}) E(x, y, z)$

Volba znaménka určuje směr šíření vlny!

Problém: co je to  $\mathbb{L} = \sqrt{\Delta_{\perp} + k_0^2 n^2(x, y, z)}$  a jak to spočítat?

Operátory  $\Delta_{\perp}$  a  $k_0^2 n^2(x, y, z)$  vzájemně nekomutují!



Předpokládejme, že optická nehomogenita prostředí je slabá,

$$n^2(x, y, z) = \varepsilon_s + \Delta\varepsilon(x, y, z), \quad \Delta\varepsilon \ll \varepsilon_s, \quad \Delta_{\perp} \ll k_0^2 \varepsilon_s$$

Pak

$$\mathbb{L} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon + \Delta_{\perp}} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp} + k_0^2 \Delta\varepsilon} \cong \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}} + k_0 \Delta n(x, y, z)$$

Ukážeme, že operátor  $\exp\left(i\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}} z\right)$  popisuje šíření vlny

v homogenním prostředí s indexem lomu  $n_s = \sqrt{\varepsilon_s}$  : Necht'

$$E(x, y, z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y, z = 0) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y,$$

$$F(k_x, k_y, z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z = 0) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy$$

Pak

$$E(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y, z = 0) \exp\left(i\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2} z\right) \exp[i(k_x x + k_y y)] dk_x dk_y$$

neboli 
$$F(k_x, k_y, z) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2} z\right) F(k_x, k_y, z = 0),$$

$$F(k_x, k_y, z) = \exp(i\mathbb{L}z) F(k_x, k_y, z = 0).$$

Šíření vlny v homogenním prostředí s indexem lomu  $n_s$

popisuje tedy ve spektrální oblasti operace násobení

$$F(k_x, k_y, z) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2} z\right) F(k_x, k_y, z = 0), \quad n_s = \sqrt{\varepsilon_s}$$

Formálně můžeme tedy psát

$$E(x, y, z) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}} z\right) E(x, y, z = 0)$$

My ale potřebujeme spočítat  $\exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}} + k_0 \Delta n(x, y, z)\right] z\right\}$ .

Operátory  $\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}}$  a  $k_0 \Delta n(x, y)$  vzájemně nekomutují, proto

$$\exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}} + k_0 \Delta n(x, y, z)\right] z\right\} \neq \exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_{\perp}}\right] z\right\} \exp\left[ik_0 \Delta n(x, y, z) z\right]$$

Použijeme tzv. “operator splitting” method: při šíření na malou vzdálenost  $\Delta z$

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ i \left[ \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_\perp} + k_0 \Delta n(x, y, z) \right] \Delta z \right\} \cong \\ & \cong \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[ \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_\perp} \right] \Delta z \right\} \exp \left[ i k_0 \Delta n(x, y, z) \Delta z \right] \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[ \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_\perp} \right] \Delta z \right\} \end{aligned}$$

Aproximace platí tím lépe, čím menší je krok  $\Delta z$ .

Dá se ukázat, že chyba je úměrná  $(\Delta z)^2$ .

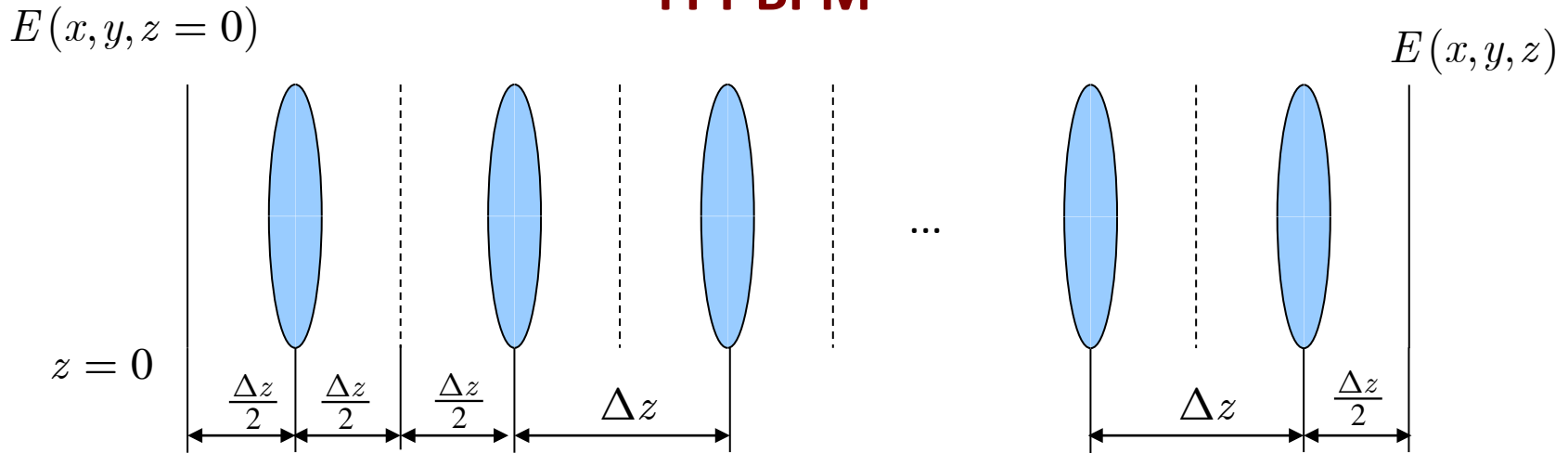
Zjemňování dělení operátoru je identické se zmenšováním kroku  $\Delta z$ .

Jednoduchá fyzikální interpretace algoritmu:

$$\underbrace{\exp \left\{ \frac{i}{2} \left[ \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_\perp} \right] \Delta z \right\}}_{\text{šíření v homog. prostředí na vzdálenost } \Delta z} \underbrace{\exp \left[ i k_0 \Delta n(x, y, z) \Delta z \right]}_{\text{fázová korekce}} \underbrace{\exp \left\{ \frac{i}{2} \left[ \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s + \Delta_\perp} \right] \Delta z \right\}}_{\text{šíření v homog. prostředí na vzdálenost } \Delta z}$$

To je princip metody šíření optického svazku založené na rychlé Fourierově transformaci (označované jako FFT BPM)

## FFT BPM



Šíření ve volném prostoru: přechod do spektrální oblasti pomocí FFT,

násobení faktorem  $\exp\left(i\sqrt{k_0^2 \varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2} \Delta z / 2\right)$ , zpětná FFT

Fázová korekce: násobení faktorem  $\exp\left[ik_0 \Delta n(x, y, z) \Delta z\right]$

atd., atd....

**Výhody** (pro 2D): relativní jednoduchost, rychlost

**Nevýhody:** použitelné pouze pro „paraxiální“ struktury s omezeným úhlovým spektrem

# Princip metody konečných diferencí (FD)

Metoda konečných diferencí: diskretizace, přechod od derivace k diferenci

$$U(x) \rightarrow u_m = U(x_m), \quad j = 1 \dots M, \quad x_j = x_0 + m\Delta x$$

$$\frac{dU}{dx} \cong \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x},$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & -1 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} \cong \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{(\Delta x)^2},$$

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{D}^{(2)} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

## FD BPM

Rovnice pro vlastní vidy jako problém vlastních čísel maticového operátoru

$$\frac{d^2}{dx^2} E + k_0^2 [n^2(x) - N^2] E = 0 \rightarrow \{ \mathbf{D}^{(2)} + k_0^2 [\mathbf{n}^2 - N^2 \mathbf{I}] \} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0},$$
$$(\mathbf{D}^{(2)} + k_0^2 \mathbf{n}^2) \cdot \mathbf{E} = N^2 \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}$$

**„Fresnelova“ aproximace:**

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -[\Delta_{\perp} E + k_0^2 n^2(x, y, z) E] = -\mathbb{L}^2 E$$

$$\mathbf{D}_z \cdot \mathbf{E} = i \sqrt{\mathbf{D}_{\perp}^{(2)} + k_0^2 n^2 \mathbf{I}} \cdot \mathbf{E} = i \mathbf{L} \cdot \mathbf{E} \quad \mathbf{L} \text{ je nyní } \mathbf{matice}$$

$$\mathbf{L} = \sqrt{\mathbf{D}_{\perp}^{(2)} + k_0^2 \mathbf{n}^2} \cong \sqrt{\mathbf{D}_{\perp}^{(2)} + k_0^2 n_s^2 \mathbf{I}} + \frac{1}{2} k_0 \left( \sqrt{\mathbf{D}_{\perp}^{(2)} + k_0^2 n_s^2 \mathbf{I}} \right)^{-1} \cdot \Delta n \mathbf{I},$$

$$\mathbf{L}_0 = \sqrt{\mathbf{D}_{\perp}^{(2)} + k_0^2 n_s^2 \mathbf{I}}, \quad \mathbf{L} \cong \mathbf{L}_0 + \frac{1}{2} k_0 \mathbf{L}_0^{-1} \cdot \Delta n \mathbf{I}$$

Omezení na „paraxiální“ šíření v důsledku „Fresnelovy“ aproximace

## Padého aproximace

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + [\Delta_{\perp} + k_0^2 n^2(x, y, z)] E = 0; \quad \text{volme } E(x, y, z) = \exp(ik_0 n_0 z) \Psi(x, y, z)$$

$\Psi(x, y, z)$  ... „pomalu proměnná amplituda“

Pak 
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2ik_0 n_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + Q\Psi = 0, \quad Q = L - k_0^2 n_0^2 = \Delta_{\perp} + k_0^2 (n^2 - n_0^2)$$

v symbolickém operátorovém vyjádření 
$$\frac{\partial}{\partial z} - i\alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2} = i\alpha Q, \quad \alpha = \frac{1}{2k_0 n_0},$$

neboli 
$$\frac{\partial}{\partial z} \left( 1 - i\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) = i\alpha Q.$$

**Padého aproximace** vychází z formálního vyjádření 
$$\frac{\partial}{\partial z} = i\alpha Q \left( 1 - i\alpha \frac{\partial}{\partial z} \right)^{-1}$$

a postupné substituce.

Padého aproximace 2. řádu: 
$$\frac{\partial}{\partial z} \approx i\alpha Q \left( 1 + \alpha^2 Q \right)^{-1},$$

3. řádu 
$$\frac{\partial}{\partial z} \approx i\alpha Q + i\alpha^3 Q^2 \left( 1 + 2\alpha^2 Q \right)^{-1}$$

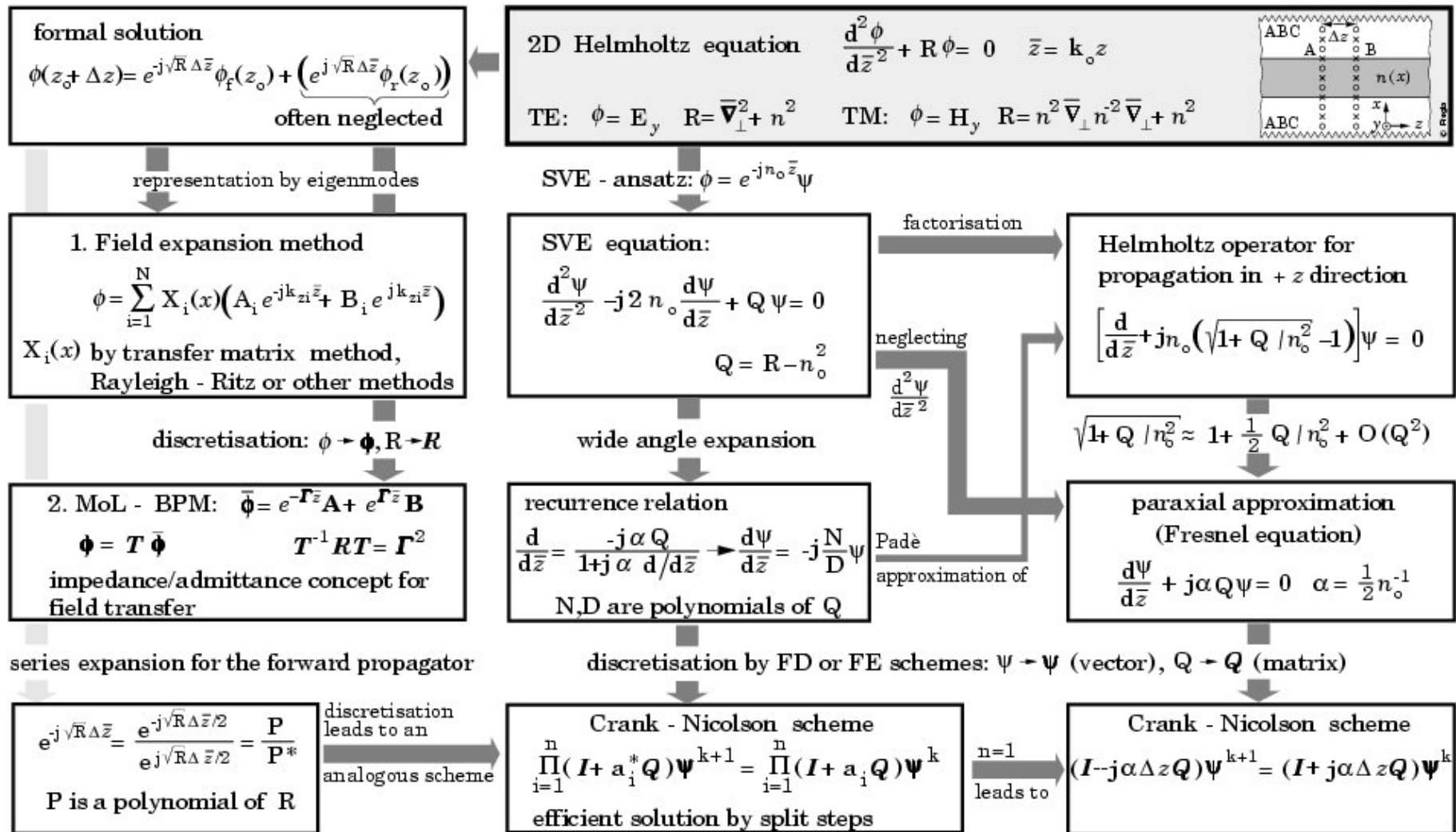
atd.

Ve FD aproximaci je  $Q$  maticový operátor, takže je ho možno explicitně vyjádřit.

Předchozí vztahy představují parabolické rovnice, které lze relativně snadno řešit.

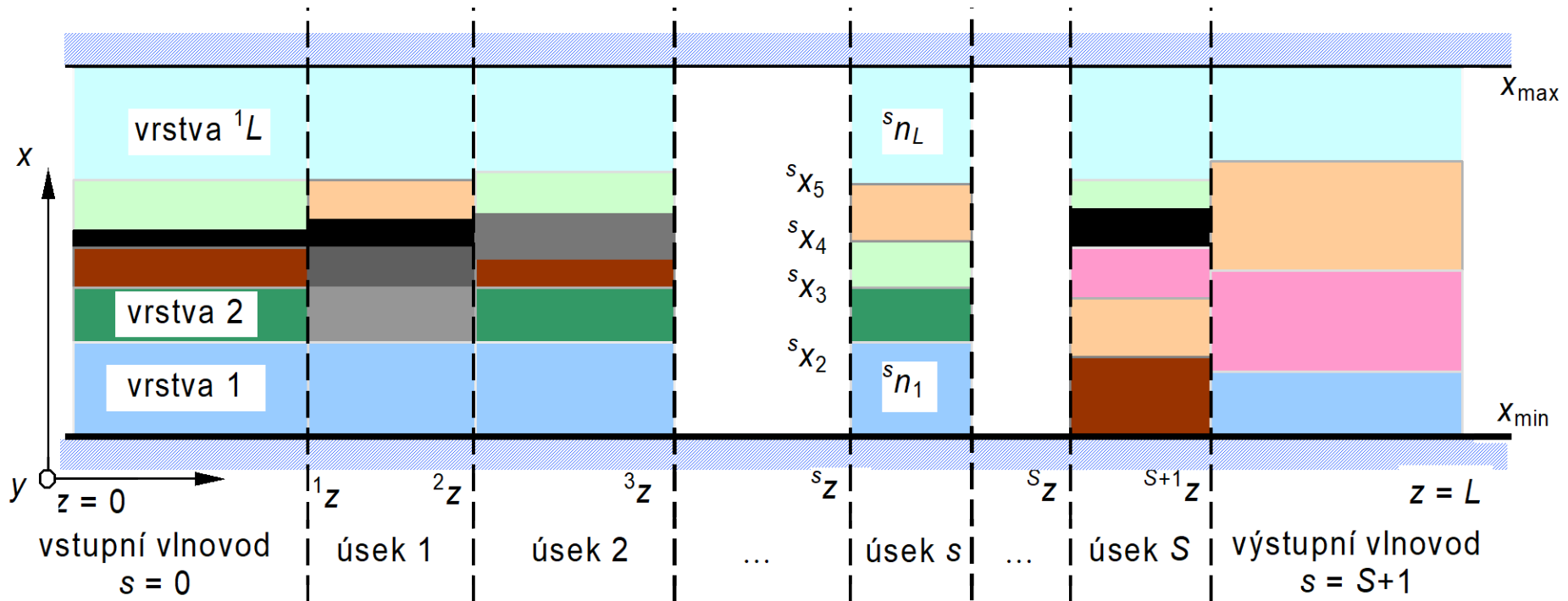
Postup je možno aplikovat i na vektorové rovnice  $\Rightarrow$  **vektorové metody BPM**

# Alternativní metody BPM (skalární aproximace)





# Metoda obousměrného rozkladu ve vlastní vidy (BEP): („rigorózní“ vektorová metoda)



$$\left. \begin{matrix} {}^s E_y \\ {}^s H_y \end{matrix} \right\} = \sum_m {}^s p_m(z) {}^s f_m(x), \quad \left. \begin{matrix} {}^s H_x \\ {}^s E_x \end{matrix} \right\} = \sum_m \frac{{}^s N_m}{{}^s \varepsilon^\nu(x)} {}^s q_m(z) {}^s f_m(x),$$

↑  
kompl. amplitudy

↑  
vlastní vidy s-tého úseku vlnovodu

## 1. Výpočet vlastních vidů v homogenním úseku

$$\frac{d^2 {}^s f_m(x)}{dx^2} + k_0^2 \left[ {}^s \varepsilon(x) - {}^s N_m^2 \right] {}^s f_m(x) = 0$$

pro TE polarizaci

$$\varepsilon \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{d {}^s f_m(x)}{dx} \right) + k_0^2 \left[ {}^s \varepsilon(x) - {}^s N_m^2 \right] {}^s f_m(x) = 0$$

pro TM polarizaci

Řešení metodou přenosových matic (příčné rezonance)

## 2. Zavedení (příčné) immitance (impedance)

$${}^s \mathbf{q}(z) = {}^s \mathbf{u}(z) \cdot {}^s \mathbf{p}(z)$$

## 3. Šíření v homogenním úseku jako transformace immitance

(lze odvodit z metody přenosové matice po delších úpravách)

$$\begin{aligned} {}^s \mathbf{u}(z + \Delta z) &= -i \left[ \tan(k_0 {}^s \mathbf{N} \Delta z) \right]^{-1} + \left[ \sin(k_0 {}^s \mathbf{N} \Delta z) \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[ {}^s \mathbf{u}(z) - \cot(k_0 {}^s \mathbf{N} \Delta z) \right]^{-1} \cdot \left[ \sin(k_0 {}^s \mathbf{N} \Delta z) \right]^{-1} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^s \mathbf{p}(z + \Delta z) &= i \left[ {}^s \mathbf{u}(z) + i \cot(k_0 {}^s \mathbf{N} \Delta z) \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[ \sin(k_0 {}^s \mathbf{N} \Delta z) \right]^{-1} \cdot {}^s \mathbf{p}(z) \end{aligned}$$

#### 4. Přechod mezi homogenními úseky

$${}^a \mathbf{u} = ({}^a \mathbf{N})^{-1} \cdot {}^{ab} \mathbf{O} \cdot {}^b \mathbf{N} \cdot {}^b \mathbf{u} \cdot {}^{ba} \mathbf{O},$$

$${}^b \mathbf{u} = ({}^b \mathbf{N})^{-1} \cdot {}^{ba} \mathbf{O} \cdot {}^a \mathbf{N} \cdot {}^a \mathbf{u} \cdot {}^{ab} \mathbf{O}.$$

$${}^b \mathbf{p} = {}^{ba} \mathbf{O} \cdot {}^a \mathbf{p},$$

$${}^b \mathbf{q} = {}^b \mathbf{N}^{-1} \cdot {}^{ba} \mathbf{O} \cdot {}^a \mathbf{N}$$

$${}^{ba} O_{nm} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{{}^a f_m(x) {}^b f_n(x)}{{}^b \varepsilon^\nu(x)} dx,$$

$${}^{ba} O_{nm} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{{}^a f_m(x) {}^b f_n(x)}{{}^a \varepsilon^\nu(x)} dx$$

#### 5. Výpočet odražené vlny na vstupu struktury

$${}^1 \mathbf{a}^-(0) = \mathbf{R} \cdot {}^1 \mathbf{a}^+(0),$$

$$\mathbf{R} = \left[ {}^1 \mathbf{u}(0) - \mathbf{I} \right] \cdot \left[ {}^1 \mathbf{u}(0) + \mathbf{I} \right]^{-1}$$

#### 6. Výpočet rozložení pole ve struktuře

$${}^1 \mathbf{p}(0) = {}^s \mathbf{a}^+(0) + {}^s \mathbf{a}^-(0);$$

$${}^s \mathbf{q}(z) = {}^s \mathbf{u}(z) \cdot {}^s \mathbf{p}(z)$$

- Immitanční formulace – dobrá numerická stabilita metody
- Okrajové podmínky – „dokonale přizpůsobené vrstvy“
- Analýza 1D periodické struktury s použitím Floquetova – Blochova teorému

# Aplikace na periodické struktury (fotonické krystaly)

**Kombinace metody rozvoje ve vlastní vidy s Floquetovým teorémem:**

Je-li struktura periodická a  ${}^L\mathbf{A}^\pm$  je přenosová matice jedné periody pro přímý a zpětný průchod,  $l$ -tý Floquetův-Blochův vid splňuje podmínku

$${}^L\mathbf{A}^\pm \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}^l \\ \mathbf{q}^l \end{pmatrix} = \exp(\pm i\phi^l) \begin{pmatrix} \mathbf{p}^l \\ \mathbf{q}^l \end{pmatrix}.$$

Jakmile známe Floquetův-Blochův vid a jeho „konstantu šíření“  $\phi^l$ , průchod strukturou o  $L$  periodách je jednoduše popsán vztahem

$${}^L\mathbf{A}^\pm \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}^l \\ \mathbf{q}^l \end{pmatrix} = \left( {}^L\mathbf{A}^\pm \right)^L \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}^l \\ \mathbf{q}^l \end{pmatrix} = \exp(\pm iL\phi^l) \begin{pmatrix} \mathbf{p}^l \\ \mathbf{q}^l \end{pmatrix}.$$

(Formulace pomocí rozptylové matice je numericky stabilnější).

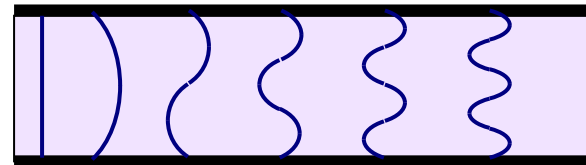
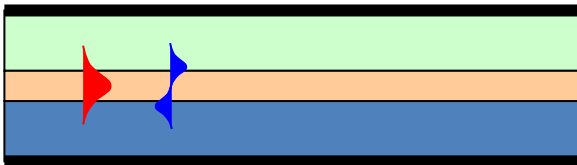
P. Bienstman: CAMFR, [camfr.sourceforge.net](http://camfr.sourceforge.net)

# Problémy „standardní“ metody BEP:

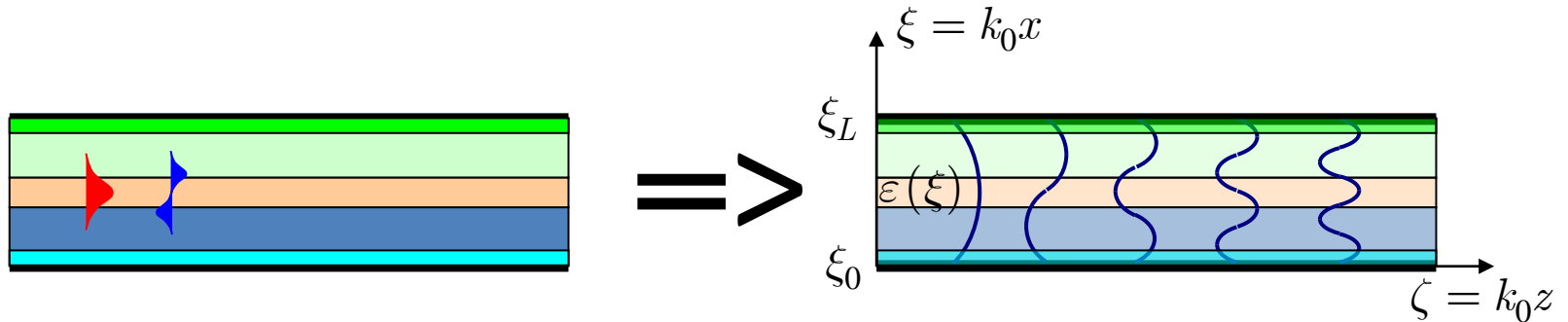
1. Pro numerický výpočet je třeba pracovat s konečným počtem vidů, ty však netvoří úplný systém. V různých sekcích jsou navíc tyto systémy různé. To vede k nejednoznačnosti splnění podmínek spojitosti tečných složek polí na rozhraní, k narušení reciprocity a v bezztrátovém prostředí ke vzniku „numerického útlumu“.
2. V případě ztrátových materiálů s komplexní permitivitou nebo při použití PML je třeba hledat relativně velký počet vidů, tedy hledat velký počet nul složité komplexní (analytické) funkce v komplexní rovině. Výpočet je časově náročný a jeho urychlení bývá na úkor spolehlivosti (některé nuly se nemusí podařit najít).

## Jednoduchá alternativa:

Metoda založená na rozvoji v harmonické funkce:



# Metoda Fourierova rozkladu (v rovinné vlny) (Ph. Lalanne)



Periodické okrajové podmínky:  $f_m(\xi_{\min}) = f(\xi_{\max})$

Rozklad do soustavy funkcí  
(= rovinné vlny)

$$u_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{X}} \exp\left(i \frac{m\pi}{X} \xi\right), \quad u'_m = i \frac{m\pi}{X} u_m(\xi)$$

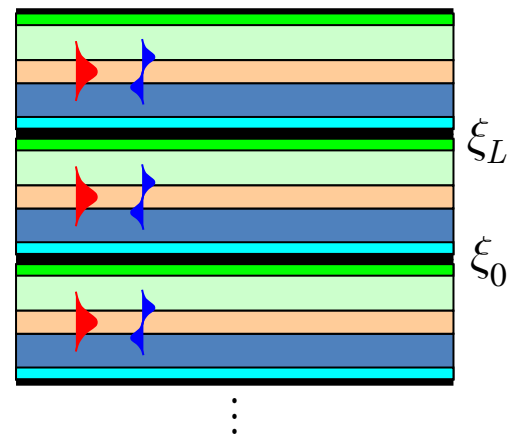
⋮

Fyzikální interpretace:

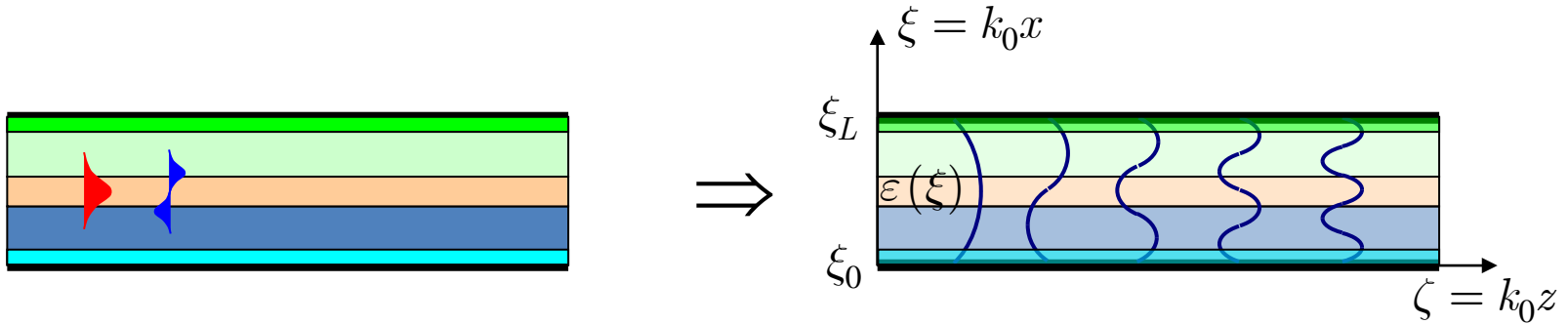
*periodické opakování* struktury

Pro neperiodické struktury

**oddělení „period“ pomocí PML**



## Metoda rozkladu ve Fourierovu řadu (2D)



### Ortonormované „vidy deskového vlnovodu“

elektricky/magneticky  
vodivé stěny

$$u(\xi_0) = u(\xi_L) = 0$$

také potřebujeme

$$v'(\xi_0) = v'(\xi_L) = 0,$$

Vzájemné relace:

$$u_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{X}} \sin\left[\frac{m\pi}{X}(\xi - \xi_0)\right], \quad X = \xi_L - \xi_0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty$$

$$u_m(\xi_0) = u_m(\xi_L) = 0$$

$$v_1(\xi) = \sqrt{\frac{1}{X}},$$

$$v'_m(\xi_0) = v'_m(\xi_L) = 0$$

$$v_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{X}} \cos\left[\frac{(m-1)\pi}{X}(\xi - \xi_0)\right], \quad m = 2, \dots, \infty$$

$$u'_m(\xi) = \frac{m\pi}{X} v_{m+1}(\xi), \quad v'_{m+1}(\xi) = -\frac{m\pi}{X} u_m(\xi).$$

# Problém „správné“ fourierovské faktorizace

P. Lalanne and G. M. Morris, *JOSA. A*, vol. 13, pp. 779-784, 1996:

Idea: Fourierův rozvoj spojitě funkce konverguje rychleji než rozvoj nespojitě funkce

Lifeng Li, *JOSA. A*, vol. 13, pp. 1870-1876, 1996:

Postavení myšlenky na solidnější matematický základ

$$D(x) = \varepsilon(x)E(x) \Rightarrow E(x) = \sum_m E_m u_m(x), \quad D(x) = \sum_m D_m u_m(x)$$

V mnoha případech je  $\varepsilon$  nespojitě.

1. Tečné složky intenzity el. pole jsou spojitě na rozhraních, tedy

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \llbracket \varepsilon \rrbracket \cdot \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \llbracket \varepsilon \rrbracket_{mm'} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u_m(x) \varepsilon(x) u_{m'}(x) dx,$$

Toeplitzova matice

2. Kolmá složka intenzity elektrického pole  $E_{\perp}$  je na rozhraní nespojitě,  $D_{\perp}$  je spojitě:

$$\mathbf{E} = \llbracket \varepsilon^{-1} \rrbracket \cdot \mathbf{D}, \quad \text{nebo} \quad \mathbf{D} = \llbracket \varepsilon^{-1} \rrbracket^{-1} \cdot \mathbf{E}, \quad \llbracket \varepsilon^{-1} \rrbracket_{mm'} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u_m(x) \frac{1}{\varepsilon(x)} u_{m'}(x) dx.$$

Obecně tedy pro *konečný počet členů rozvoje*

~~$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\parallel} \\ \mathbf{D}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \llbracket \varepsilon \rrbracket & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \llbracket \varepsilon \rrbracket \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\perp} \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\parallel} \\ \mathbf{D}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \llbracket \varepsilon \rrbracket & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \llbracket 1/\varepsilon \rrbracket^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\perp} \end{pmatrix}$$



Rozvoj s konečným počtem členů a jeho maticové vyjádření:

$$f(\xi) = \sum_{m=1}^M {}^u f_m u_m(\xi), \text{ etc.} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(\xi) &\rightarrow {}^u \mathbf{f}, \\ g(\xi) &\rightarrow {}^u \mathbf{g}, \quad h(\xi) \rightarrow {}^v \mathbf{h} = \begin{pmatrix} {}^v h_1 \\ {}^v h_2 \\ \vdots \\ {}^v h_M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

TE vidy:

$${}^{vu} \mathbf{D} \cdot {}^u \mathbf{f} = {}^v \mathbf{h}$$

$${}^u \mathbf{g}(\xi) = N {}^u \mathbf{f}(\xi)$$

$${}^{uv} \mathbf{D} \cdot {}^v \mathbf{h} = N {}^u \mathbf{g} - {}^u \boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}^u \mathbf{f}$$

TM vidy:

$${}^v \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot {}^{vu} \mathbf{D} \cdot {}^u \mathbf{f} = {}^v \mathbf{h}$$

$${}^u \mathbf{g}(\xi) = N {}^u \boldsymbol{\eta} \cdot {}^u \mathbf{f}$$

$${}^{uv} \mathbf{D} \cdot {}^v \mathbf{h} = N {}^u \mathbf{g} - {}^u \mathbf{f}$$

$$\left( {}^{uv} \mathbf{D} \cdot {}^{vu} \mathbf{D} + {}^u \boldsymbol{\varepsilon} \right) \cdot {}^u \mathbf{f} = N^2 {}^u \mathbf{f}$$

$$\left( \mathbf{I} + {}^{uv} \mathbf{D} \cdot {}^v \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot {}^{vu} \mathbf{D} \right) \cdot {}^u \mathbf{f} = N^2 {}^u \boldsymbol{\eta} \cdot {}^u \mathbf{f}$$

$${}^u \varepsilon_{mn} = \int_{\xi_0}^{\xi_M} u_m(\xi) \varepsilon(\xi) u_n(\xi) d\xi,$$

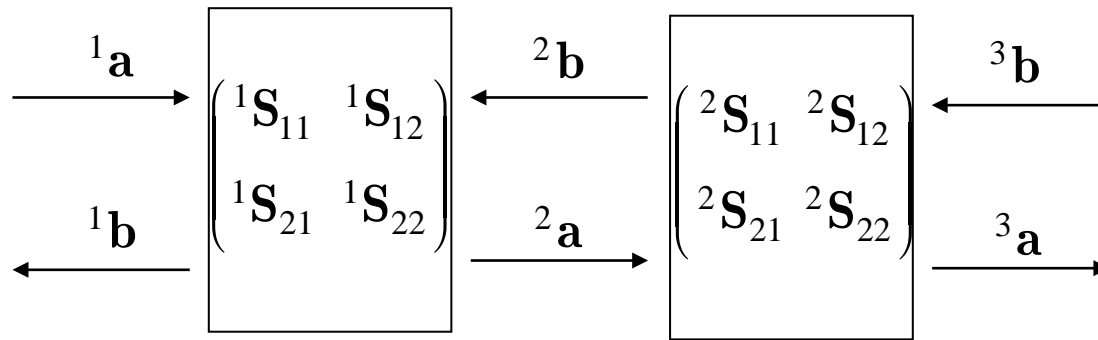
$${}^v \varepsilon_{mn} = \int_{\xi_0}^{\xi_M} v_m(\xi) \varepsilon(\xi) v_n(\xi) d\xi$$

$${}^u \eta_{mn} = \int_{\xi_0}^{\xi_M} u_m(\xi) \frac{1}{\varepsilon(\xi)} u_n(\xi) d\xi$$

$${}^{uv} D_{mn} = -{}^{vu} D_{mn} = \frac{m\pi}{X} \delta_{mn},$$

$$\left( \mathbf{I} + {}^{uv} \mathbf{D} \cdot {}^v \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot {}^{vu} \mathbf{D} \right)_{mm'} = \delta_{mm'} - \frac{\pi^2}{X^2} m m' \left( {}^v \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \right)_{m+1, m'+1}$$

## Rozptylová matice spojení (konkatenace) dvou sousedních sekcí



$$\begin{pmatrix} {}^1\mathbf{b} \\ {}^2\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{S}_{11} & {}^1\mathbf{S}_{12} \\ {}^1\mathbf{S}_{21} & {}^1\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{a} \\ {}^2\mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} {}^2\mathbf{b} \\ {}^3\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^2\mathbf{S}_{11} & {}^2\mathbf{S}_{12} \\ {}^2\mathbf{S}_{21} & {}^2\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^2\mathbf{a} \\ {}^3\mathbf{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{b} \\ {}^3\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{a} \\ {}^3\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

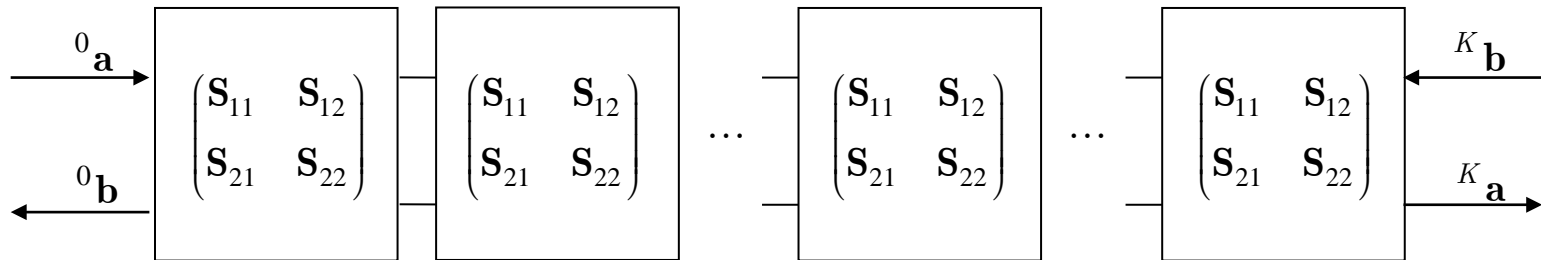
$$\mathbf{S}_{11} = {}^1\mathbf{S}_{12} \cdot (\mathbf{I} - {}^2\mathbf{S}_{11} \cdot {}^1\mathbf{S}_{22})^{-1} \cdot {}^2\mathbf{S}_{11} \cdot {}^1\mathbf{S}_{21} + {}^1\mathbf{S}_{11},$$

$$\mathbf{S}_{12} = {}^1\mathbf{S}_{12} \cdot (\mathbf{I} - {}^2\mathbf{S}_{11} \cdot {}^1\mathbf{S}_{22})^{-1} \cdot {}^2\mathbf{S}_{12},$$

$$\mathbf{S}_{21} = {}^2\mathbf{S}_{21} \cdot (\mathbf{I} - {}^1\mathbf{S}_{22} \cdot {}^2\mathbf{S}_{11})^{-1} \cdot {}^1\mathbf{S}_{21}.$$

$$\mathbf{S}_{22} = {}^2\mathbf{S}_{21} \cdot (\mathbf{I} - {}^1\mathbf{S}_{22} \cdot {}^2\mathbf{S}_{11})^{-1} \cdot {}^1\mathbf{S}_{22} \cdot {}^2\mathbf{S}_{12} + {}^2\mathbf{S}_{22}.$$

## Periodické struktury a Blochovy vidy



Zobecněná úloha vlastních čísel – Blochovy vidy

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}$$

Transformace mezi lokálními normálními vidy a Blochovými vidy:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^B \\ \mathbf{b}^B \end{pmatrix}$$

Rozptylová matice  $K$  period v bázi Blochových vidů

$$\mathbf{S}^B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{\Gamma}^+)^K \\ (\mathbf{\Gamma}^+)^K & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^+ = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M), \quad |\gamma_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

## Numericky stabilnější formulace rovnice pro Blochovy vidy

Konstanty šíření Blochových vidů v zakázaném pásu jsou komplexní,  $\gamma$  tak mohou být v modulu velmi velká čísla.

Lze najít stabilnější formulaci úlohy:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix} = (1 + \gamma)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & \mathbf{I} + \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} + \mathbf{S}_{21} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & \mathbf{I} + \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} + \mathbf{S}_{21} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix},$$

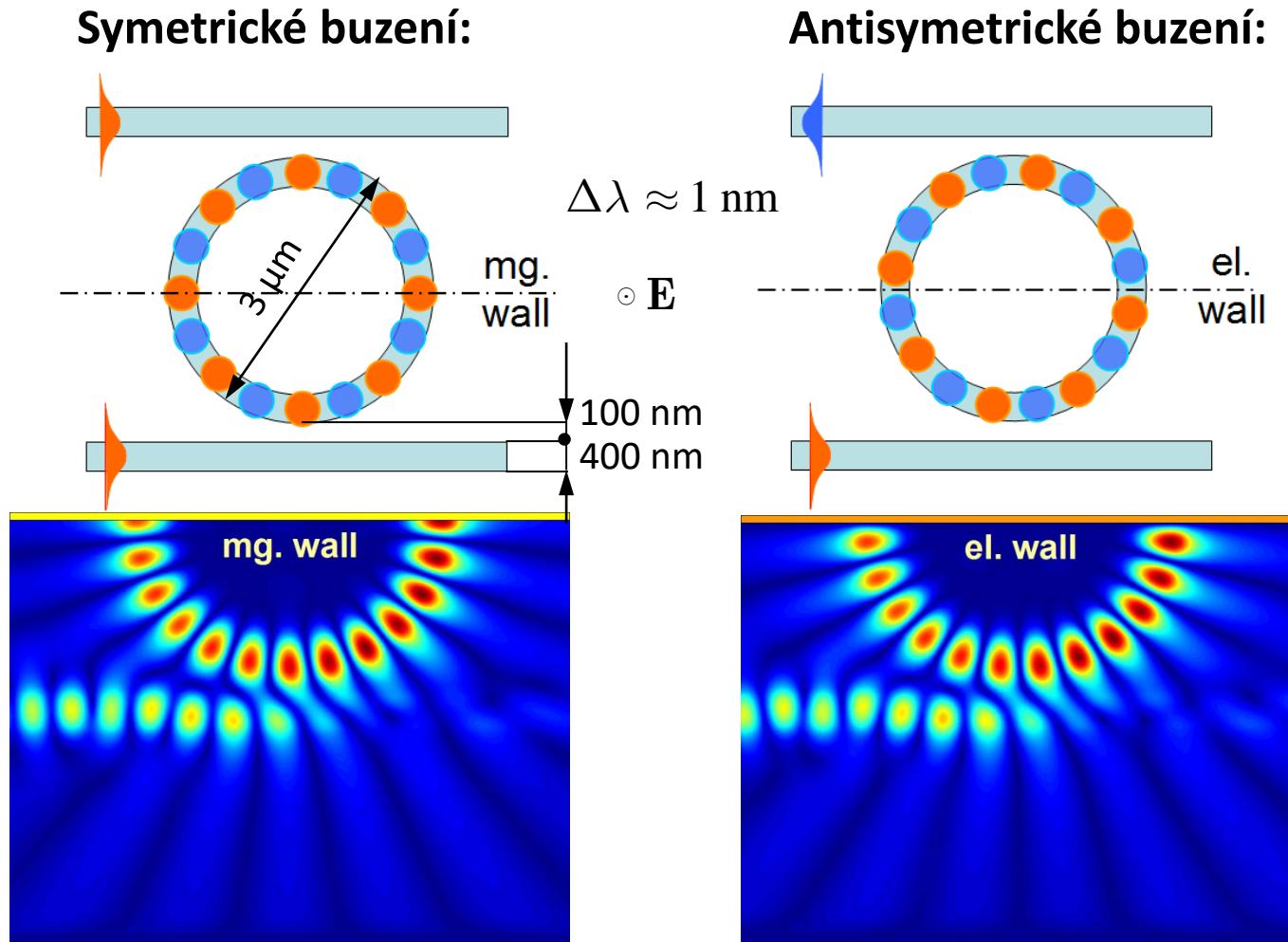
kde

$$G = (1 + \gamma)^{-1}, \quad \gamma = G^{-1} - 1.$$

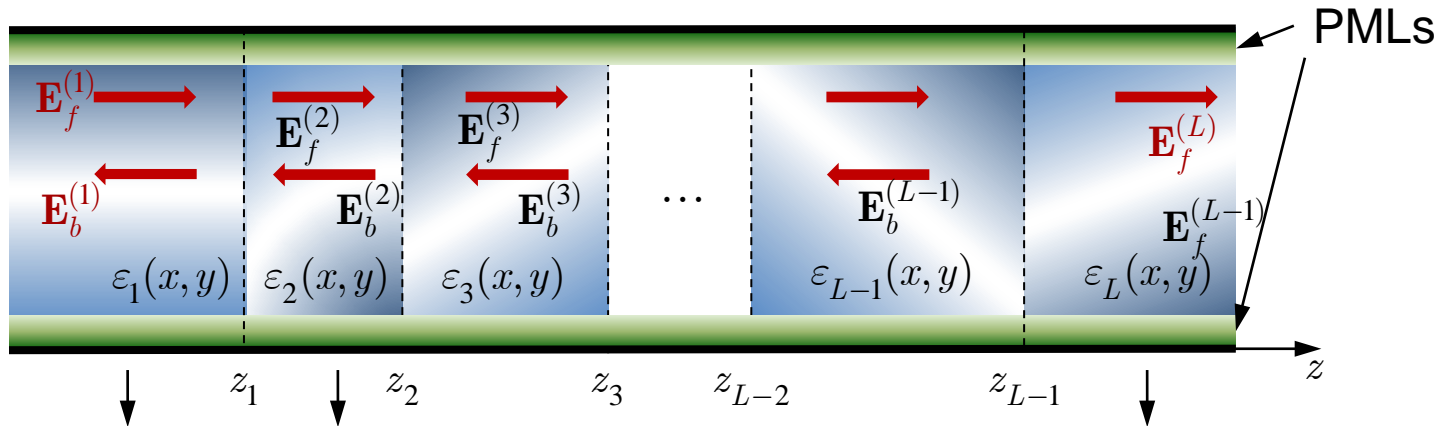
Vlastní číslo  $G$  je zřejmě malé.

# VYUŽITÍ SYMETRIE VLNOVODNÉ STRUKTURY

Rozštěpení rezonance mikrorezonátoru vlivem porušení symetrie vazbou na vlnovod; při symetrickém a antisymetrickém buzení jsou rezonanční křivky posunuté!



# 3D METODY ZALOŽENÉ NA FOURIEROVSKÉM ROZVOJI



Vlastní vidy:

$$\begin{matrix} \mathbf{e}_m^{(1)}(x, y) & \mathbf{e}_m^{(2)}(x, y) & & & \mathbf{e}_m^{(L)}(x, y) \\ \mathbf{h}_m^{(1)}(x, y) & \mathbf{h}_m^{(2)}(x, y) & \dots & & \mathbf{h}_m^{(L)}(x, y) \end{matrix} \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Modální rozvoj:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp^{(j)} &= \mathbf{E}_{f\perp}^{(j)} + \mathbf{E}_{b\perp}^{(j)} = \sum_m \left[ a_m^{(j)}(z) + b_m^{(j)}(z) \right] \mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(x, y), & a^{(j)}, b^{(j)} \dots \text{komplexní} \\ \mathbf{H}_\perp^{(j)} &= \mathbf{H}_{f\perp}^{(j)} + \mathbf{H}_{b\perp}^{(j)} = \sum_m \left[ a_m^{(j)}(z) - b_m^{(j)}(z) \right] \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(x, y), & \text{amplitudy vidů} \end{aligned}$$

Rozptylová matice:

uvnitř homogenní sekce:

přechod mezi sekcemi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(j)}(z_{j-1}) \\ \mathbf{a}^{(j)}(z_j) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(j)} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)}(z_{j-1}) \\ \mathbf{b}^{(j)}(z_j) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e^{i\boldsymbol{\beta}^{(j)}\Delta z_j} \\ e^{i\boldsymbol{\beta}^{(j)}\Delta z_j} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(j)}(z_j) \\ \mathbf{a}^{(j+1)}(z_j) \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(j,j+1)} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)}(z_j) \\ \mathbf{b}^{(j+1)}(z_j) \end{pmatrix};$$

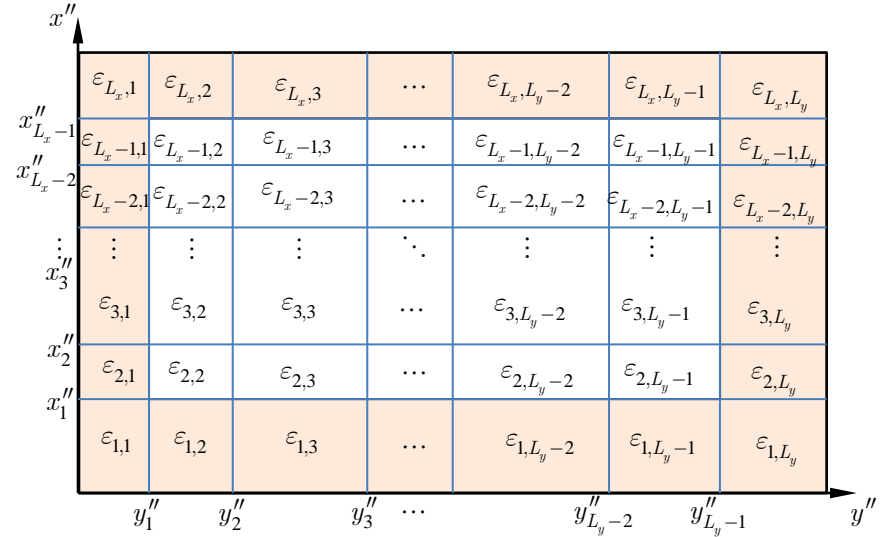
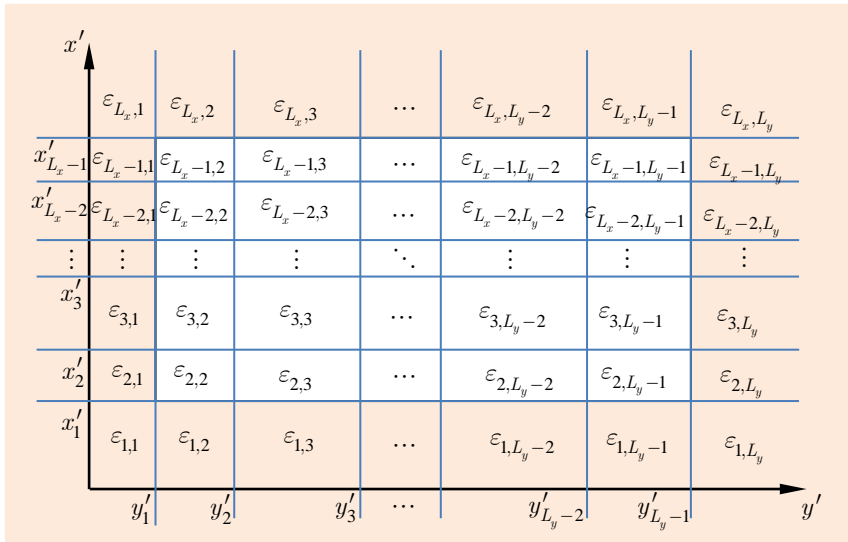
Výsledná matice soustavy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(L)} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

překryvové integrály

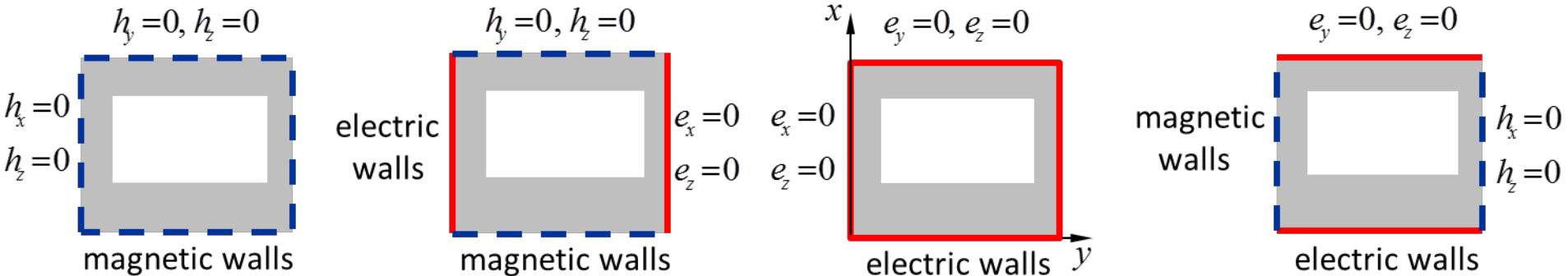
# KOMPLEXNÍ TRANSFORMACE ve 2D

Transformace nekonečné komplexní oblasti do reálné konečné



$$\frac{\partial}{\partial x'} = c_x(x'') \frac{\partial}{\partial x''}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = c_y(y'') \frac{\partial}{\partial y''}$$

Aplikace různých typů okrajových podmínek



# „H-FORMULACE“ ELEKTROMAGNETICKÉHO PROBLÉMU

Za nezávislé skalární funkce volíme příčné složky vektoru  $\mathbf{H}$

Z Maxwellových rovnic získáme

$$h_z = \frac{i}{N} \left( c_x(x'') \frac{\partial h_x}{\partial x''} + c_y(y'') \frac{\partial h_y}{\partial y''} \right),$$

$$e_x = \eta \left[ N h_y - \frac{1}{N} c_y \frac{\partial}{\partial y''} \left( c_x \frac{\partial h_x}{\partial x''} + c_y \frac{\partial h_y}{\partial y''} \right) \right],$$

$$e_y = -\eta \left[ N h_x - \frac{1}{N} c_x \frac{\partial}{\partial x''} \left( c_x \frac{\partial h_x}{\partial x''} + c_y \frac{\partial h_y}{\partial y''} \right) \right],$$

$$e_z = i\eta \left( c_x \frac{\partial h_y}{\partial x''} - c_y \frac{\partial h_x}{\partial y''} \right),$$

a dostaneme rovnici pro vlastní vidy v H-formulaci:

$$\varepsilon \left[ \mathbf{I} + \begin{pmatrix} \eta c_x \frac{\partial}{\partial x''} & c_y \frac{\partial}{\partial y''} \eta \\ \eta c_y \frac{\partial}{\partial y''} & -c_x \frac{\partial}{\partial x''} \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \frac{\partial}{\partial x''} & c_y \frac{\partial}{\partial y''} \\ c_y \frac{\partial}{\partial y''} & -c_x \frac{\partial}{\partial x''} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = N^2 \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$



# FOURIEROVSKÝ ROZKLAD I

$$e_x(x'', y'') = u_{x,m}(x'') v_{y,n}(y'') e_{x,mn}, \quad m = 1, \dots, M_x, \quad n = 1, \dots, M_y + 1.$$

$$e_y(x'', y'') = v_{x,m}(x'') u_{y,n}(y'') e_{y,mn}, \quad m = 1, \dots, M_x + 1, \quad n = 1, \dots, M_y,$$

$$e_z(x'', y'') = v_{x,m}(x'') v_{y,n}(y'') e_{z,mn}, \quad m = 1, \dots, M_x + 1, \quad n = 1, \dots, M_y + 1,$$

$$h_x(x'', y'') = v_{x,m}(x'') u_{y,n}(y'') h_{x,mn}, \quad m = 1, \dots, M_x + 1, \quad n = 1, \dots, M_y,$$

$$h_y(x'', y'') = u_{x,m}(x'') v_{y,n}(y'') h_{y,mn}, \quad m = 1, \dots, M_x, \quad n = 1, \dots, M_y + 1,$$

$$h_z(x'', y'') = u_{x,m}(x'') u_{y,n}(y'') h_{z,mn}, \quad m = 1, \dots, M_x, \quad n = 1, \dots, M_y.$$

(Předpokládáme Einsteinovu konvenci sčítání přes opakované indexy).

Rovnice pro vlastní vidy přejde v rovnici pro vlastní čísla a vlastní vektory matice:

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{vu} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket \cdot {}^{vu} \mathbf{C}^u & {}^v \mathbf{C}^{uv} \cdot {}^{vv} \llbracket \boldsymbol{\varepsilon} \rrbracket^{-1} \\ {}^{uv} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket \cdot {}^u \mathbf{C}^{vu} & -{}^{uv} \mathbf{C}^v \cdot {}^{vv} \llbracket \boldsymbol{\varepsilon} \rrbracket^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{uw} \mathbf{C}^u & {}^u \mathbf{C}^{uv} \\ {}^v \mathbf{C}^{vu} & -{}^{vu} \mathbf{C}^v \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{vu} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{uv} \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N}^2,$$

Matice  $\mathbf{C}$  zahrnují fourierovský rozklad transformačních funkcí  $c_x(x'')$  a  $c_y(y'')$

## FOURIEROVSKÝ ROZKLAD II

Transformaci derivací v harmonické funkce  $\frac{\partial}{\partial x'} = c_x(x'') \frac{\partial}{\partial x''}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y'} = c_y(y'') \frac{\partial}{\partial y''}$  rovněž rozložíme

$$c_x(x'') \frac{du_{x,m}(x'')}{dx''} = v_{x,m'}(x'')^{vu} C_{x,m'm}, \quad c_x(x'') \frac{dv_{x,m}(x'')}{dx''} = u_{x,m'}(x'')^{uv} C_{x,m'm},$$

$$c_y(y'') \frac{du_{y,n}(y'')}{dy''} = v_{y,n'}(y'')^{vu} C_{y,n'n}, \quad c_y(y'') \frac{dv_{y,n}(y'')}{dy''} = u_{y,n'}(y'')^{uv} C_{y,n'n},$$

a zavedeme „dvojrozměrné“ matice  $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} {}^{uv}\mathbf{C}^u &= {}^{uv}\mathbf{C}_x \otimes {}^u\mathbf{I}_y, & {}^{uv}\mathbf{C}^v &= {}^{uv}\mathbf{C}_x \otimes {}^v\mathbf{I}_y, & {}^{vu}\mathbf{C}^u &= {}^{vu}\mathbf{C}_x \otimes {}^u\mathbf{I}_y, & {}^{vu}\mathbf{C}^v &= {}^{vu}\mathbf{C}_x \otimes {}^v\mathbf{I}_y, \\ {}^u\mathbf{C}^{uv} &= {}^u\mathbf{I}_x \otimes {}^{uv}\mathbf{C}_y, & {}^u\mathbf{C}^{vu} &= {}^u\mathbf{I}_x \otimes {}^{vu}\mathbf{C}_y, & {}^v\mathbf{C}^{uv} &= {}^v\mathbf{I}_y \otimes {}^{uv}\mathbf{C}_y, & {}^v\mathbf{C}^{vu} &= {}^v\mathbf{I}_y \otimes {}^{vu}\mathbf{C}_y. \end{aligned}$$

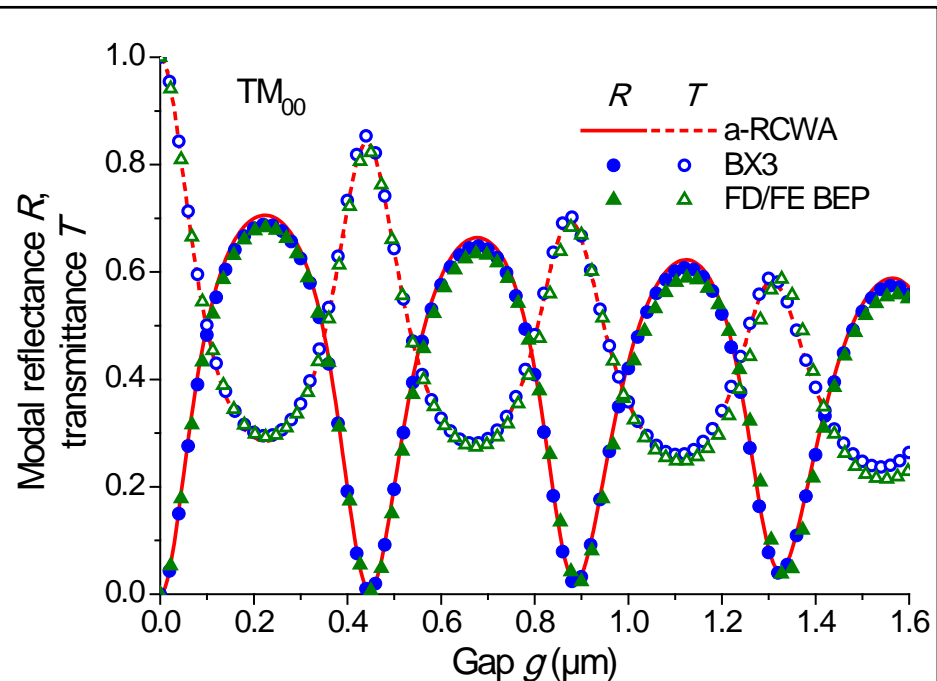
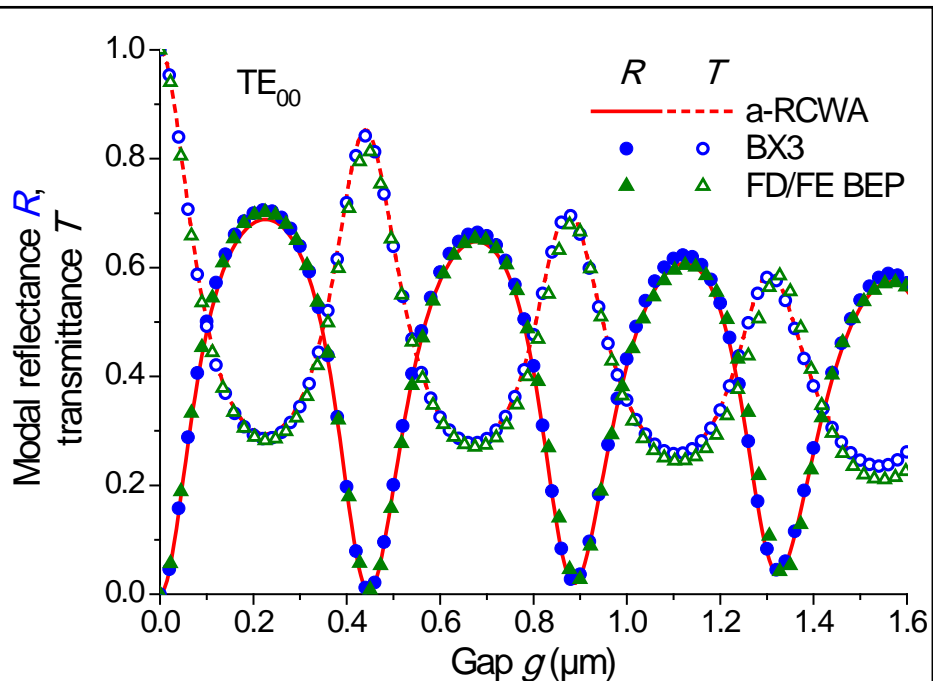
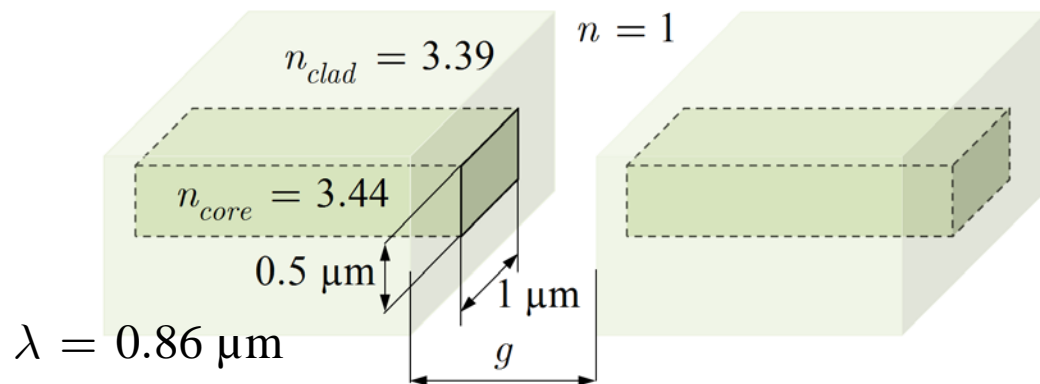
Rovnice pro vlastní vidy přejde v rovnici pro vlastní čísla a vlastní vektory matice:

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{vu}[[\boldsymbol{\eta}]] \cdot {}^{vu}\mathbf{C}^u & {}^v\mathbf{C}^{uv} \cdot {}^{vu}[[\boldsymbol{\varepsilon}]]^{-1} \\ {}^{uv}[[\boldsymbol{\eta}]] \cdot {}^u\mathbf{C}^{vu} & -{}^{uv}\mathbf{C}^v \cdot {}^{vu}[[\boldsymbol{\varepsilon}]]^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{uv}\mathbf{C}^u & {}^u\mathbf{C}^{uv} \\ {}^v\mathbf{C}^{vu} & -{}^{vu}\mathbf{C}^v \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{vu}[[\boldsymbol{\eta}]] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{uv}[[\boldsymbol{\eta}]] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N}^2,$$

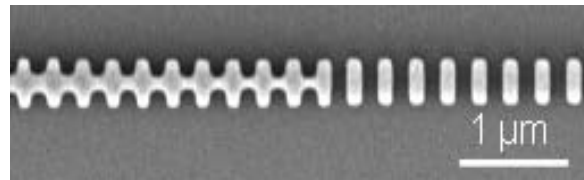
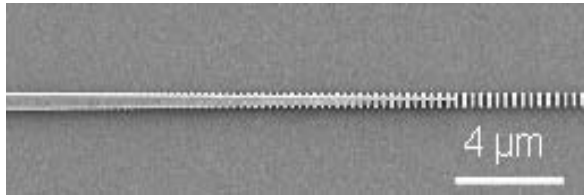
kde symboly  $[[\boldsymbol{\eta}]]$ ,  $[[\boldsymbol{\eta}]]$  a  $[[\boldsymbol{\varepsilon}]]$  označují „správnou“ fourierovskou faktorizaci ve 2D. Další postup (rozptylové matice a jejich konkatence) je analogický případu 2D.

# PŘÍKLAD APLIKACE 3D METODY

Modální transmittance a reflektance  
v závislosti na velikosti štěrbině  
v polovodičovém vlnovodu  
GaAs/GaAlAs

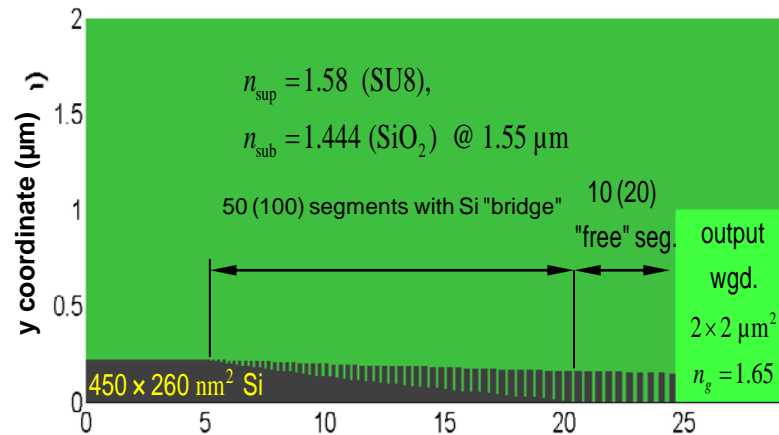


# VAZEBNÍ ČLEN SE SUBVLNOVÝM MŘÍŽKOVÝM VLNOVODEM



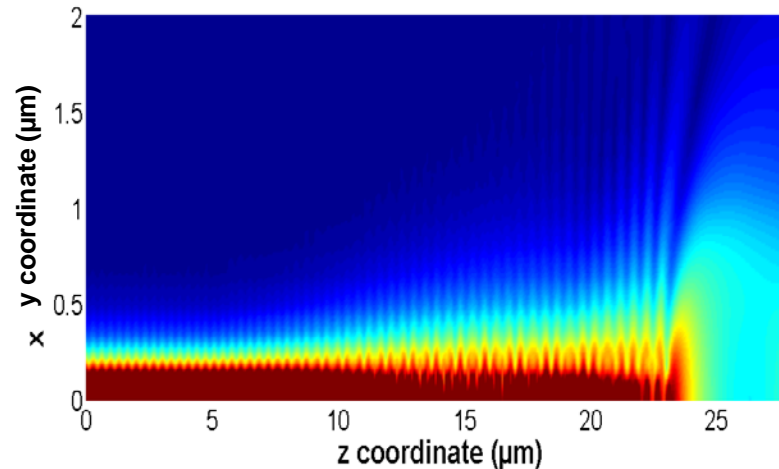
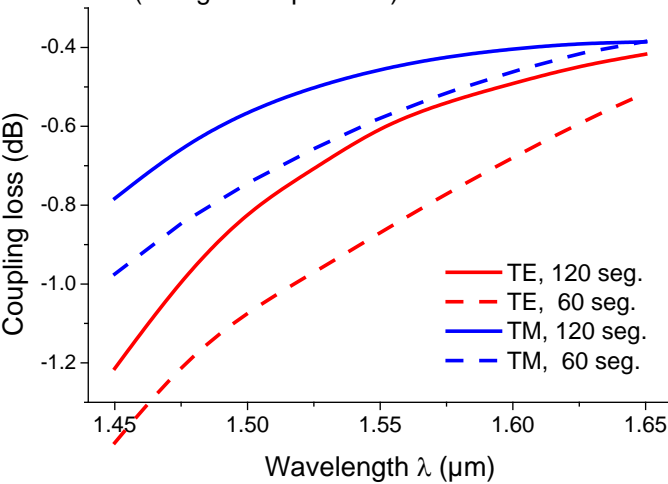
P. Cheben, P. J. Bock, *et al.*, *Optics Letters*, vol. 35, pp. 2526-2528, 2010,  
 I. Glesk, P. J. Bock, P. Cheben, *et al.*, *Optics Express*, vol. 19, pp. 14031-14039, 2011.

Top view



Coupling from SOI nanowire  $450 \times 260 \text{ nm}^2$  into a  $2 \times 2 \text{ μm}$  polymer waveguide  
 short coupler: 60 segments  
 long coupler: 120 segments

(Design not optimized)



Lateral symmetry,  
 $M_x = 60$  (vertical)  
 $M_y = 50$  (horizontal)  
 Eigenvalue matrix size  
 $8531 \times 8531$  elements

HP Z400, 6 cores,  
 3.2 GHz, 24 GB RAM  
 4 (8) days

# Existuje množství komerčních softwarových produktů pro modelování a návrh integrovaně-optických struktur



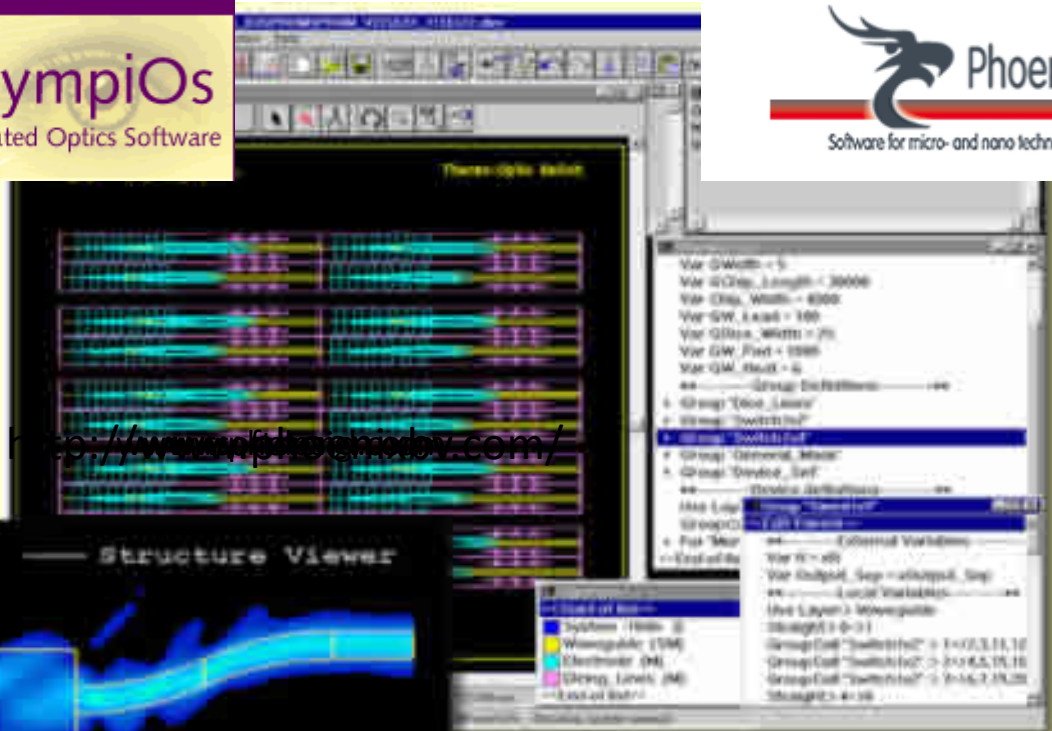
[www.c2v.nl](http://www.c2v.nl)



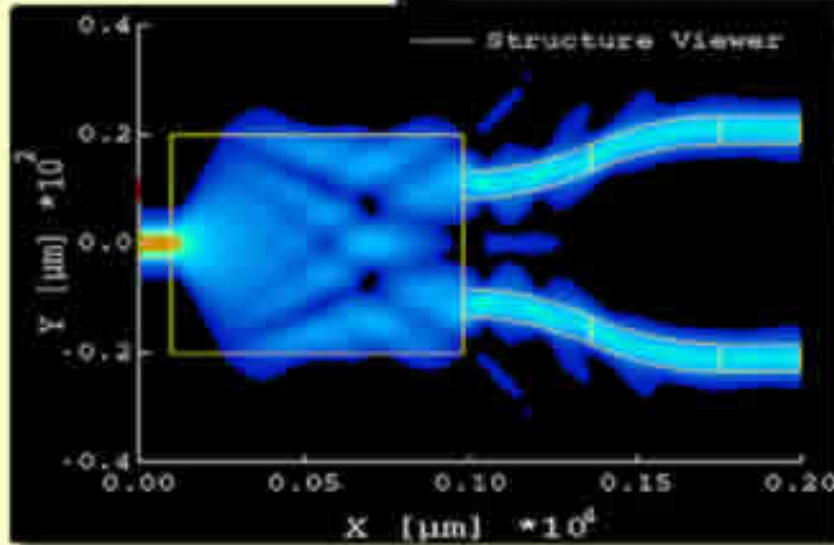
[www.rsoftdesign.com](http://www.rsoftdesign.com)

OlympiOs  
Integrated Optics Software

[www.phoenixbv.com/](http://www.phoenixbv.com/)



<http://www.photond.com/>



[www.optiwave.com](http://www.optiwave.com)



[www.photond.com](http://www.photond.com)